Universität Bielefeld
F. Gähler

Wintersemester 2017/18
Abgabe bis 12.01.2018, 16 Uhr

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 11

Aufgabe 1
Diagonalisieren Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dazu zunächst die Eigenwerte, dann jeweils die zugehörigen Eigenvektoren. Wählen Sie die Eigenvektoren als Orthonormalbasis (warum geht das?).

(2+3 Punkte)

Aufgabe 2
Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ heißt *negativ definit*, wenn $\langle x, Ax \rangle < 0$ gilt für jedes $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: A ist negativ definit genau wenn $-A$ positiv definit ist.

(2 Punkt)

Aufgabe 3
Sind folgende Matrizen positiv definit, negativ definit, oder gar nicht definit?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 2 \\ -8 & 2 & 17 \end{pmatrix}$$

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $P_A(x)$ das charakteristische Polynom der Matrix A.

a) Berechnen Sie $P_A(A)$ für die jeweils 1. Matrix der Aufgaben 1 und 3.

b) Zeigen Sie, dass es für jede diagonalisierbare Matrix so herauskommen muss, wie die Beispiele aus (a) nahelegen.

Hinweis: $P_a(A) = \det(A - A \cdot \mathbb{1}) = \det(0) = 0$ ist nicht der richtige Weg (warum?).

(2+2 Punkte)

– bitte wenden –

Die folgenden Aufgaben sind **freiwillig**; man kann damit Punkte erzielen, aber sie zählen nicht fürs Punktesoll. Solche oder ähnliche Aufgaben könnten in der **Klausur** auftauchen.

Aufgabe 5

a) Seien A und B hermitesche Matrizen. Zeigen Sie, dass AB hermitesch ist, wenn die Matrizen A und B vertauschen.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die dazu duale Basis.

c) Eine hermitesche Matrix A besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Ein Eigenvektor zu λ_1 sei $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wie lautet der Eigenraum zu λ_2?

(1+2+1 Punkte)

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

b) Ist die Matrix A aus a) invertierbar (Begründung!)? Falls ja, geben Sie die Determinante der Inversen an.

c) Sei A wiederum die Matrix aus a), und $S = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\mathrm{tr}(SAS^{-1})$ und $\det(SAS^{-1})$.

(3+1+2 Punkte)

Aufgabe 7

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar? Welche Eigenwerte hat B, und was sind deren algebraische und geometrische Vielfachheiten?
Hinweis: Berechnen Sie zuerst B^2, und ziehen Sie daraus Ihre Schlüsse!

c) Eine Matrix C erfülle die Gleichung $C^3 = -C$. Welche komplexen Zahlen λ kommen dann als Eigenwerte von C in Frage?

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 12.01.2018, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128