Universität Bielefeld **Wintersemester 2017/18**
F. Gähler **Abgabe bis 19.01.2018, 16 Uhr**

Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 12

Aufgabe 1
Sei P eine Projektion, welche auf den Vektorraum V wirkt. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Kern}(P) = \{x - P(x) \mid x \in V\}$

b) $V = \mathrm{Kern}(P) \oplus \mathrm{Bild}(P)$

c) P ist Orthogonalprojektion genau wenn $\mathrm{Kern}(P) \perp \mathrm{Bild}(P)$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, sowie die zugehörige Basis aus Eigenvektoren.

b) Bestimmen Sie die dazu duale Basis, und zeigen Sie, dass die dualen Basisvektoren linksseitige Eigenvektoren von A zu denselben Eigenwerten sind. Linksseitige Eigenvektoren sind Zeilenvektoren, welche eine Eigenwertgleichung $xA = \lambda x$ erfüllen.

c) Geben Sie für A eine Spektralzerlegung $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ an, mit Projektoren P_i, welche den einen Eigenvektor von A im Bild, und den anderen im Kern haben. Sind diese Projektoren orthogonal?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3
Im $\mathbb{R}^3$ sei die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Sei $U = \{cb_1 \mid c \in \mathbb{R}\}$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von $U^\perp$, indem Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf $\mathcal{B}$ anwenden. Die so erhaltene Basis heiße $\mathcal{B}'$.

b) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

(3+1 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 19.01.2018, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128