Übungen zur Vorlesung

Lineare Algebra für Physik

Blatt 13

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\sin(A)$.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst A^2, und schließen Sie dann induktiv auf A^n.

(2 Punkte)

Aufgabe 2

a) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ fest. Zeigen Sie, dass die Matrizen $M(t) = e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$, eine Gruppe bilden. Wie sieht die Gruppenmultiplikation aus?

b) Bestimmen Sie die Menge der Matrizen A, für welche die Matrizen $M(t) = e^{tA}$ alle orthogonal sind.

c) Bestimmen Sie die Menge der Matrizen A, für welche die Matrizen $M(t) = e^{itA}$ alle unitär sind (beachten Sie das zusätzliche i im Exponenten). Was ändert sich, wenn man statt unitärer Matrizen spezielle unitäre haben will?

Hinweis: Betrachten Sie auch Ableitungen nach dem Gruppenparameter t an der Stelle $t = 0$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Das Vektorprodukt $x \times y$ zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektor mit Komponenten $(x \times y)_i = \det(e_i, x, y)$, wobei (e_i, x, y) die Matrix mit den Spaltenvektoren e_i, x und y ist, und e_i der i-te Standardbasisvektor.

a) Zeigen Sie, dass $x \times y$ senkrecht auf x und y steht.

b) Sei $\omega \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Bestimmen Sie die Matrix Ω der linearen Abbildung $x \mapsto \omega \times x$.

c) Berechnen Sie induktiv die Potenzen Ω^n von Ω. Nutzen Sie aus, dass ω Betrag 1 hat.

d) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung gilt:

$$e^{\varphi\,\Omega} = \cos(\varphi)\,\mathbb{1} + (1 - \cos(\varphi))\,\omega\,\omega^T + \sin(\varphi)\,\Omega$$

Überlegen Sie sich, dass dies eine Drehung um den Winkel φ mit Drehachse ω darstellt. Dabei ist $\omega\,\omega^T$ ist die Matrix mit den Einträgen $\omega_i\omega_j$.

(1+2+2+3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 26.01.2018, 16.00 Uhr, in den Postfächern der jeweiligen Tutoren im Kopierraum V3-126/128