Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/19**
D. Rust

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften I

Blatt 1

Aufgabe 1

Finden Sie den Fehler in folgendem Induktionsbeweis.

Behauptung $A(n)$ für $n \geq 1$: Beliebige n natürliche Zahlen sind gleich.
Induktionsanfang $n = 1$: $A(1)$ ist offenbar richtig.
Induktionsschritt $n \to n+1$ $(n \geq 1)$: Betrachte eine beliebige Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ von $n+1$ natürlichen Zahlen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_1 = \cdots = a_n$ und $a_2 = \cdots = a_{n+1}$, also auch $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$, da a_2 ja in beiden Gleichungsketten auftaucht.

Aufgabe 2

Die Fibonacci-Zahlen f_n sind rekursiv definiert durch $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ für $n \geq 2$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n gilt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Hinweis. Hier hat man es mit der verschärften Form der Induktion zu tun.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Rekursion $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ und $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ für $n \geq 3$. Berechnen Sie die ersten a_n und formulieren Sie eine Vermutung über die Form von a_n. Beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 4

Sei n eine natürliche Zahl. In wieviele Gebiete a_n kann man die Ebene mit n Geraden *maximal* zerlegen? Bestimmen Sie eine geschlossene (nichtrekursive) Formel für a_n.

Hinweis. Offenbar gilt $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ und $a_3 = 7$. Wieviele neue Gebiete kann man durch geschickte Hinzufügung der n-ten Geraden maximal erzeugen?

Aufgabe 5

Was ist die kleinste natürliche Zahl n, ab der die Ungleichung $2^n > n^2$ gilt? Beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion nach n.