Universität Bielefeld
F. Gähler

Wintersemester 2018/19

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften I

Blatt 5

Aufgabe 1
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $a, b \in G$.

(a) Zeigen Sie: falls $a = ab$ für ein a, dann ist $b = e$.

(b) Wieviele Lösungen besitzt $b^2 = b$ in G? Welche?

(c) Wie ist dies mit den 2 Lösungen $x = 0, 1$ von $x^2 = x$ in einem Körper vereinbar?

Aufgabe 2
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $a, b \in G$. Zeigen Sie:

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$

(b) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

Aufgabe 3
Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $a, b \in G$.

(a) Zeigen Sie, dass $f_a : G \to G, g \mapsto ag$ eine bijektive Abbildung ist.

(b) Was ist die Umkehrabbildung?

(c) Was ist die Verkettung $f_a \circ f_b$?

(d) Ist $G' = \{f_a | a \in G\}$ mit der Hintereinanderschaltung $\circ$ als Verknüpfung eine Gruppe?

Aufgabe 4
Seien W_1 und W_2 Unterräume eines Vektorraums V.

(a) Zeigen Sie, dass $W_1 + W_2$ ein Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $W_1 + W_2$ der kleinste Vektorraum ist, der W_1 und W_2 enthält.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(W_1 \cup W_2) = W_1 + W_2$ gilt.

(d) Finden Sie zwei Unterräume $W_1, W_2 \subseteq \mathbb{R}^2$, für die $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^2$, aber $W_1 \cap W_2 \neq \mathbb{R}^2$ gilt. Ist $W_1 \cup W_2$ in diesem Fall ein Unterraum?