**Universität Bielefeld** **Wintersemester 2018/19**
**D. Rust**

## Übungen zur Vorlesung
# Mathematik für Naturwissenschaften I
**Blatt 2**

**Aufgabe 1**
Zeigen Sie, dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$ gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

*Hinweis.* Per Definition ist $\frac{x}{y} = xy^{-1}$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$. Beweis durch Verwendung der Körperaxiome.

**(4 Punkte)**

**Aufgabe 2**
(a) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x \geq -1$ und alle natürlichen Zahlen $n$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x, y$ gilt

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy.$$

*Hinweis.* Teil (a): Beweis durch vollständige Induktion nach $n$ unter Verwendung der Anordnungsaxiome. Teil (b): Folgt durch Umformung der Ungleichung $(x - y)^2 \geq 0$.

**(2+2 Punkte)**

**Aufgabe 3**
Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt $2n + 1 \leq n^2$.

(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \neq 3$ gilt $n^2 \leq 2^n$.

(c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.

(d) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und alle $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!}.$$

*Hinweis.* Teile (a)-(c): Beweis durch vollständige Induktion nach $n$.

**(2+2+2+2 Punkte)**

**Aufgabe 4**

Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

(a)
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

(b)
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < 3.$$

*Hinweis.* Teil (a): Folgt aus dem Binomischen Lehrsatz zusammen mit Aufgabe 3(d). Teil (b): Folgt aus Aufgabe 3(c) sowie der Summenformel für die geometrische Reihe.

**(2+2 Punkte)**

**Abgabe bis Freitag, 26.10.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128**