Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/19**
D. Rust

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaften I
Blatt 3

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine reelle Zahl a gilt:

(a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist Nullfolge genau dann, wenn $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge ist.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Limes a, so ist $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Limes $|a|$. Gilt hier auch die Umkehrung?

Hinweis. Teil (b): Fallunterscheidung $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2 (Potenzen wachsen schneller als Polynome)
Zeigen Sie, dass gilt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

Hinweis. Aufgabe 3(b) von Übungsblatt 2 zusammen mit Aussage 3) von Satz über **(Rechnen mit Grenzwerten)** und anschließender Bemerkung.

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge, gegeben durch

$$a_n := \frac{\alpha_k n^k + \alpha_{k-1} n^{k-1} + \ldots + \alpha_2 n^2 + \alpha_1 n + \alpha_0}{\beta_l n^l + \beta_{l-1} n^{l-1} + \ldots + \beta_2 n^2 + \beta_1 n + \beta_0},$$

wobei k, l natürliche Zahlen sind und $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ bzw. $\beta_0, \ldots, \beta_l$ reelle Zahlen sind mit $\alpha_k, \beta_l, \beta_0 \neq 0$ sind.

Hinweis. Da $\beta_0 \neq 0$, ist der Nenner für fast alle n ungleich Null und damit der gesamte Term wohldefiniert. Nehmen Sie zur Einfachheit ruhig an, dass der Nenner niemals Null ist. Zähler und Nenner des n-ten Folgeglieds sind also Polynome in n vom Grad k bzw. l. Klammern Sie in Zähler und Nenner die höchste Potenz von n aus und unterscheiden Sie dann die Fälle $k > l$, $k = l$ und $k < l$.

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 2.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128