

**Übungen zur Vorlesung**  
**Mathematik für Naturwissenschaften I**  
Blatt 4

**Aufgabe 1**

Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der nachstehenden Folgen und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

(a)  $a_n = \frac{-n^3+n^2+n+1}{n^2+1000n+21}$ .

(b)  $a_n = \frac{4n^3+n+1}{7n^2+n+1}$ .

(c)  $a_n = \frac{4n^3+n+1}{7n^3+1}$ .

(d)  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5$ .

(e)  $a_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$ .

(f)  $a_n = \frac{n!}{n^n}$ .

*Hinweis.* Teil (e): Beweisen Sie zunächst eine einfachere Formel für  $a_n$ .

**(1+1+1+1+2+2 Punkte)**

**Aufgabe 2**

Es sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit Limes  $a$ . Zeigen Sie, dass die Folge  $(b_n)_{n \geq 2}$ , gegeben durch

$$b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}),$$

ebenfalls gegen  $a$  konvergiert.

*Hinweis.* Das folgt sofort aus den bekannten Rechenregeln für Grenzwerte. Sind die Folgen  $(a_{n-1})_{n \geq 1}$  bzw.  $(a_{n-2})_{n \geq 2}$  konvergent? Falls ja, was sind die Grenzwerte?

**(2 Punkte)**

**Aufgabe 3 (Newtons Methode, Quadratwurzeln zu finden)**

Sei  $x > 0$  eine reelle Zahl. Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , gegeben durch  $a_0 := 1$  und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{x}{a_n} \right).$$

- Schreiben Sie  $a_0, a_1, a_2, a_3$  für  $x = 9$  (schreiben Sie die Antworten als Brüche).

- Zeigen Sie, dass gilt:

(für alle  $x > 0$ )

- (a)  $a_n > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (b)  $a_n^2 \geq x$  für alle  $n \geq 1$ .
- (c)  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist monoton fallend.
- (d)  $a_n \geq \frac{x}{a_1}$  für alle  $n \geq 1$ .
- (e) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Für den Grenzwert  $a$  gilt weiter  $a > 0$  und

$$a^2 = x.$$

*Hinweis.* Teil (a): Beweis durch vollständige Induktion. Teil (b): Siehe Aufgabe 2(b) auf Übungsblatt 2. Teil (c): Folgt aus Teil b). Teil (d): Beweis durch vollständige Induktion. Teil (e): Rechnen mit Grenzwerten (Satz in Vorlesung). Wo genau geht das Vollständigkeitsaxiom ein?

**(1+1+1+2+1+3 Punkte)**

**Abgabe bis Freitag, 9.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128**