Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/19**
D. Rust

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften I

Blatt 5

Aufgabe 1
Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $a_0 = 1$ und

$$a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}}$$

für $n \geq 1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass gilt

$$a_n = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}},$$

wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen ist. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis. Für das Konvergenzverhalten verwenden Sie die explizite Formel für f_n aus Aufgabe 2 von Präsenzübungsblatt 1.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rekursiv definiert durch $a_0 = 1$ und

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$$

konvergent ist und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis. Für die Konvergenz genügt es zu zeigen, dass die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, z.B. durch die Zahl 2.

(1+1+2 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die Folge $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Eulersche Zahl $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert.

Hinweis. Zeigen Sie zunächst unter Verwendung von Aufgabe 2(a) auf Übungsblatt 2, dass die Folge $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist. Aus Aufgabe 4 auf Übungsblatt 2 folgt dann (wie genau?), dass die Folge $\left((1 + \frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Für den Limes gilt nach der oben genannten Aufgabe weiter

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

Es bleibt also nur die andere Ungleichung zu zeigen. Verwenden Sie den Binomischen Lehrsatz.

(8 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 16.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128