Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/19**
F. Gähler

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften I

Blatt 6

Aufgabe 1
Sei $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2z - y = 0\}$.

a) Zeigen Sie, dass W ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Geben Sie zwei verschiedene Basen von W an.

c) Sei $W' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + 2z - y = 1\}$. Ist W' ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?

d) Sei $W'' = \{v - w | v, w \in W'\}$. Ist W'' ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?

(1+2+1+1 Punkte)

Aufgabe 2
Sei $V = \mathbb{R}^3$, $W_1 = \{(a, b, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$, $W_2 = \{(c, d, -d) | c, d \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$.

(1+1 Punkte)

Aufgabe 3
Sei V die direkte Summe zweier Untervektorräume, sagen wir $V = W_1 \oplus W_2$. Seien B_1 und B_2 Basen von W_1 bzw. W_2. Zeigen Sie, dass $B_1 \cup B_2$ eine Basis von V ist.

(2 Punkte)

Aufgabe 4
Sei M die Menge der folgenden 6 Vektoren $v_1, \ldots, v_6 \in \mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1, 2, 1, 2), & v_2 &= (1, 1, 1, 1), & v_3 &= (0, 1, 1, 0), \\ v_4 &= (0, 1, 0, 1), & v_5 &= (1, 0, 0, 1), & v_6 &= (1, 2, 2, 1). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine Basis $B \subseteq M$ des von den 6 Vektoren aus M aufgespannten Vektorraums, und schreiben Sie die übrigen Vektoren aus M als Linearkombinationen dieser Basisvektoren.

(2 Punkte)

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und sei $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$ linear unabhängig.

a) Zeigen Sie, dass $S \cup \{v\}$ mit $v \in V$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $v \notin \mathcal{L}(S)$.

b) Zeigen Sie, dass S genau dann eine Basis von V ist, wenn $n = k$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass S genau dann eine Basis von V ist, wenn $S \cup \{v\}$ für jedes $v \in V$ linear abhängig ist.

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 23.11.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128