Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/19**
F. Gähler

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaften I
Blatt 8

Aufgabe 1
Seien U, V Vektorräume über einem Körper K und sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ tatsächlich Untervektorräume von U bzw. V sind.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 2
Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear sind. Wenn ja, geben Sie eine Matrix A mit $f(x) = Ax$ an.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_2 - 5x_1 \end{pmatrix}$

(b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

(3 Punkte)

Aufgabe 3
Betrachten Sie die durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ definierte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (also $f(x) = Ax$). Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ und überprüfen Sie die Richtigkeit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen. Ist f injektiv oder surjektiv? Ist f ein Isomorphismus?

(5 Punkte)

Aufgabe 4
Sei

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie M^2, M^3.

(b) Seien $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ die Fibonacci-Zahlen. Zeigen Sie durch Induktion:

$$M^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, dass

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Inverse Matrix von M ist.

(2+2+1 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 7.12.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128