Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/19**
D. Rust

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaften I
Blatt 9 (Weihnachtsblatt)

Aufgabe 1
Sei $M \neq \varnothing$ eine nach unten bechränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Eine größte untere Schranke $M_{min} \in \mathbb{R}$ von M existiert (Satz in Vorlesungen). Konstruieren Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M (d.h. $a_n \in M$ für alle n), die gegen M_{min} konvergiert. Ist M_{min} immer ein Element von M?

Hinweis. M_{min} ist untere Schranke von M, aber für kein $\varepsilon > 0$ ist $M_{min}+\varepsilon$ eine untere Schranke von M. Betrachten Sie $\varepsilon = 1/n$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass der Quotient $\frac{f}{g}$ zweier stetiger Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf dem Definitionsbereich $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$ ist.

Zeigen Sie von der Definition, dass

(a) für jede $c \in \mathbb{R}$, $f(x) = c$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

(b) $g(x) = x$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.

Zeigen Sie, dass die Funktion $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 1/x$ für jede $0 < a < b$ stetig ist. Was passiert, wenn a negativ und b positiv ist?

(4 + 1 + 1 + 2 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie die Stetigkeit der Exponentialfunktion im Nullpunkt 0, indem Sie vorab die Ungleichung

$$|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$$

mittels der Identität $2 = \sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n$ für $|x| \leq 1$ beweisen. Zeigen Sie auch, wie nun aus der Funktionalgleichung die Stetigkeit in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ folgt.

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 14.12.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128