Universität Bielefeld **Wintersemester 2018/19**
D. Rust

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften I

Blatt 10

Aufgabe 1 (Doppelwinkelformel)
Die Potenzreihenformeln für $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind:

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Zeigen Sie, dass $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ mit der Cauchy-Produktformel für Potenzreihen.

Hinweis. Schreiben Sie zuerst die Potenzreihen in Standardform ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$). Für $c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell . b_{k-\ell}$ betrachten Sie die Fälle getrennt $k = 4j, 4j+1, 4j+2, 4j+3$.

(3 Punkte)

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

in jedem Punkt differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

Hinweis. Im Punkt 0 müssen Sie den Differentialquotienten berechnen. Die Sinusfunktion ist beschränkt mit $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(4 Punkte)

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass für $x > 0$ gilt $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Folgern Sie daraus, dass gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

Beweisen Sie damit erneut, dass gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Hinweis. Letzter Teil: Betrachten Sie speziell $x = 1/n$ und verwenden Sie die Stetigkeit der Exponentialfunktion.

(2+1+1 Punkte)

Aufgabe 4
Seien $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ n-mal differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die allgemeine Produktregel

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für die n-te Ableitung der Produktfunktion fg.

Hinweis. Vollständige Induktion nach n unter Verwendung der Produktregel und die Lemma 'Additionssatz für Binomialkoeffizienten'.

(6 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 21.12.2018, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128