

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaften I

Blatt 11

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y gilt:

(a) $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$.

(b) $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ und $\sin(x) = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$.

(c) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.

Hinweis. Teil (c): Additionstheoreme und Teil (a).

(1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) $\sin' = \cos$.

(b) $\cos' = -\sin$.

(c) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Hinweis. Teil (a): Verwenden Sie die Identität aus Aufgabe 1(c), die Stetigkeit der Cosinusfunktion und den Limes $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Teil (b): Folgt aus Teil (a) zusammen mit den Identitäten aus Aufgabe 1(b) bzw. (d). Teil (c): Folgt aus Teil (a) zusammen mit der Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3

Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und die lokalen Extrema der Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = x^2 \ln x$. Bestimmen Sie weiter $\lim_{x \searrow 0} f(x)$. Skizzieren Sie die Funktion.

(4 Punkte)

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x \ln x}{x^2} = 0.$$

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 11.01.19, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128