**Universität Bielefeld** **Wintersemester 2018/19**
**F. Gähler**

## Übungen zur Vorlesung

# Mathematik für Naturwissenschaften I

### Blatt 13

**Aufgabe 1**

Eine Teilmenge $U$ eines Vektorraums $V$ heißt affiner Unterraum von $V$, wenn ein Vektor $x \in V$ und ein Unterraum $W$ von $V$ existieren, so dass $U = x + W$ ist. Sei nun $U = x + W$ ein affiner Unterraum.

a) Zeigen Sie, dass $\{ v - w \mid v, w \in U \} = W$, d.h. die Differenzen der Vektoren aus $U$ bilden den Unterraum $W$ von $V$.

b) Muss $x \in U$ gelten? Ist $x$ eindeutig bestimmt? Ist $W$ eindeutig bestimmt?

c) Sei $f : V \to V'$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge $U$ der Gleichung $f(x) = c$, $c \in V'$, entweder die leere Menge oder ein affiner Unterraum ist. Was ist $W$ in diesem Fall?

d) Die Dimension des affinen Unterraums $U$ ist durch $\dim U := \dim W$ definiert. Sei $f$ wie oben. Sei $\dim V = n_1$, $\dim V' = n_2$ und $\dim \ker(f) = n_3$. Was ist die Dimension des affinen Lösungsraumes $U = \{ x \mid f(x) = c \}$, falls $U$ nicht leer ist?

**(2+2+2+1 Punkte)**

**Aufgabe 2**

Sei $\{e_1, e_2\}$ die kanonische Basis im $\mathbb{R}^2$ und $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2)$, $e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-e_1 + e_2)$ eine um 45° gedrehte Basis.

a) Sei $x = e_1 + 2e_2$. Geben Sie $x$ bezüglich der Basis $\{e'_1, e'_2\}$ an, d.h. berechnen Sie die Koeffizienten $x'_1$, $x'_2$ in $x = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2$.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = Ax$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $f$ bezüglich der Basis $\{e'_1, e'_2\}$, d.h. berechnen Sie die Matrix $A' = (a'_{ij})_{2\times 2}$ mit $f(e'_i) = \sum_{j=1}^{2} a'_{ji} e'_j$. Was fällt auf?

c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = Cx$ mit $C = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $g$ bezüglich der Basis $\{e'_1, e'_2\}$. Was fällt auf?

**(2+2+2 Punkte)**

**Aufgabe 3**
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichung $Ax = b$ mit Hilfe des Verfahrens aus den Bemerkungen nach Satz 4.19 und vor Satz 4.13. Geben Sie die gesamte Lösungsmenge an. Was ist der Rang von $A$, welche Dimension hat der (affine) Lösungsraum?

**(4 Punkte)**

**Abgabe bis Freitag, 25.1.2019, 10.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128**