Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
F. Gähler

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 6

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie folgende Produkte in S_6:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

und geben Sie die inversen Permutationen zu den Produkten an.
Führen Sie dieselbe Rechnung auch in Zyklenschreibweise durch.

b) Zeigen Sie, dass die Symmetrische Gruppe S_n für $n \geq 3$ *nicht* kommutativ ist.

c) Zeigen Sie (mit Hilfe vollständiger Induktion), dass die Anzahl der Elemente der symmetrischen Gruppe S_n gleich $n!$ ist.

Aufgabe 2

Seien A und B reelle $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \det(A + xB)$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion ist. Zeigen Sie insbesondere $f^{(k)}(x) \equiv 0$ für alle $k > n$.

Aufgabe 3

Seien B eine $n \times n$-Matrix, $c \in K$ und sei $f : M(n \times n, K) \to K$ definiert durch

$$f(A) := c \det(AB).$$

Zeigen Sie (ohne den Satz über das Produkt von Determinanten zu verwenden)

a) $f(A)$ ist linear in jeder Zeile

b) $f(A)$ ist alternierend, d. h. $f(A) = 0$ falls A zwei gleiche Zeilen besitzt.

Unter welchen Bedingungen erfüllt f die Normierungsbedingung $f(E_n) = 1$?

Aufgabe 4

Berechnen Sie die komplementäre Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist A invertierbar? Wenn ja, wie lautet A^{-1}?