Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
F. Gähler

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 7

Aufgabe 1

a) Sei $P_n(z)$ ein Polynom n-ten Grades, mit reellen Koeffizienten. Sei $z = c \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $P_n(z)$. Zeigen Sie, dass dann auch $\bar{c}$ eine Nullstelle von $P_n(z)$ ist.

Hinweis: $\overline{ab} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ und $\overline{a^n} = \bar{a}^n$.

b) Sei P_n wie oben und n ungerade. Folgern Sie aus a), dass P_n mindestens eine reelle Nullstelle hat.

Aufgabe 2

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Sei x ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2. Können wir daraus schließen, dass x auch ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist?

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Wie lauten die Eigenräume und was sind die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte?

Aufgabe 4

Eine reelle orthogonale $n \times n$-Matrix heißt Spiegelung, wenn sie nur die Eigenwerte ± 1 besitzt und der Eigenwert -1 die algebraische Vielfachheit 1 besitzt.
Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \text{ eine Spiegelung ist. Diagonalisieren Sie } A.$$

Hinweis: $\sin\varphi = 2\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\frac{\varphi}{2}), \quad 1 + \cos\varphi = 2\cos^2(\frac{\varphi}{2}), \quad 1 - \cos\varphi = 2\sin^2(\frac{\varphi}{2})$