Universität Bielefeld
F. Gähler **Sommersemester 2019**

Präsenzübungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaften II
Blatt 8

Aufgabe 1
Sei A eine $n \times n$-Matrix, und $x \in \mathbb{C}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:

a) Sx ist Eigenvektor von SAS^{-1}. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

b) Die Matrix B vertausche mit A. Zeigen Sie, dass auch Bx ein Eigenvektor von A ist (zu welchem Eigenwert?).

c) Ist A reell, so ist auch der komplex konjugierte Wert $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A. Wie lautet ein entsprechender Eigenvektor?

d) Ist A reell, so sind die geometrischen Vielfachheiten von λ und $\bar{\lambda}$ gleich.

e) Ist A reell, so sind die algebraischen Vielfachheiten von λ und $\bar{\lambda}$ gleich.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass durch $||x||_1 := \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ eine Norm auf dem Vektorraum ℓ_1 der absolut konvergenten reellen Reihen definiert ist.

b) Die Folge $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ sei durch

$$x^{(n)} := (\underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{\text{n-mal}}, 0, \ldots)$$

gegeben. Konvergiert die Folge gegen $\xi = (0, 0, \ldots)$ in der oben definierten Norm $|| \cdot ||_1$?

c) Konvergiert die obige Folge $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ in der Maximumsnorm $||x||_\infty := \max_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$?

d) Sind die beiden Normen äquivalent? Lassen sich Konstanten $c_1 \in \mathbb{R}^+$ und $c_2 \in \mathbb{R}^+$ finden, sodass

$$||x||_\infty \leq c_1 ||x||_1 \quad \text{und} \quad ||x||_1 \leq c_2 ||x||_\infty$$

für alle $x \in \ell_1$ gilt?