Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
F. Gähler

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 9

Aufgabe 1

Sei $V = C^\infty[0,1]$ und U der Unterraum der Polynome vom Grad höchstens 2: $U = \{ax^2+bx+c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$. Sei $\langle f,g\rangle := \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$. Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U, indem Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf die Basis $\{1,x,x^2\}$ von U anwenden.

Aufgabe 2

Sei V ein euklidischer Vektorraum. Zeigen Sie, dass gilt:

a) $\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 = 4\langle x,y\rangle$

b) $\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2 = 2 \| x \|^2 + 2 \| y \|^2$

c) Wie müssen diese Gleichungen für einen unitären Vektorraum modifiziert werden?

d) Wird jede Norm von einem Skalarprodukt erzeugt, d. h. existiert zu jeder Norm $||\cdot||$ ein Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, sodass $||x|| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ für alle $x \in V$ gilt?
[Hinweis: a) gibt an, wie man das innere Produkt definieren könnte und b) gibt eine Eigenschaft an, die erfüllt sein muss. Betrachten Sie die Maximumsnorm oder die 1-Norm auf $\mathbb{C}^n$.]

Aufgabe 3

Sei V ein euklidischer/unitärer Vektorraum und $\{b_1,\ldots,b_n\}$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie, dass für $x,y \in V$ gilt:

a) $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^n \overline{\langle b_i,x\rangle}\langle b_i,y\rangle$

b) $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle b_i,x\rangle|^2$

Gelten die obigen Formeln auch, wenn $\{b_1,\ldots,b_n\}$ keine Orthonormalbasis ist? Wenn ja, warum? Wenn nein, wie muss man die Formeln modifizieren?