Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
F. Gähler

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 12

Aufgabe 1
Das Vektorprodukt $x \times y$ zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist ein Vektor mit Komponenten $(x \times y)_i = \det(e_i, x, y)$, wobei (e_i, x, y) die Matrix mit den Spaltenvektoren e_i, x und y ist, und e_i der i-te Standardbasisvektor.

a) Zeigen Sie, dass $x \times y$ senkrecht auf x und y steht.

b) Sei $\omega \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsvektor. Bestimmen Sie die Matrix Ω der linearen Abbildung $x \mapsto \omega \times x$.

c) Berechnen Sie induktiv die Potenzen Ω^n von Ω. Nutzen Sie aus, dass ω Betrag 1 hat.

d) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung gilt:

$$e^{\varphi \Omega} = \cos(\varphi)\, \mathbb{1} + (1 - \cos(\varphi))\, \omega\, \omega^T + \sin(\varphi)\, \Omega$$

Überlegen Sie sich, dass dies eine Drehung um den Winkel φ mit Drehachse ω darstellt. Dabei ist $\omega\, \omega^T$ die Matrix mit den Einträgen $\omega_i \omega_j$.

Aufgabe 2
Berechnen Sie die Längen der folgenden Kurven:

a) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = (t, t^{3/2})^T$.

b) $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}^2$ mit $f(t) = e^{-t}(\cos t, \sin t)^T$ für $a \in \mathbb{R}$.

c) $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 2\cosh(t))^T$.

Aufgabe 3
Der Gradient einer Funktion f an der Stelle $(x_1, \ldots, x_n)$ ist definiert als der Vektor

$$\nabla f(x_1, \ldots, x_n) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n) \right).$$

Zeigen Sie (mit der Hilfe der Definition der partiellen Ableitung), dass der Gradient der folgenden Funktion $f(x,y)$ im Punkt $(0,0)$ existiert, und geben Sie seinen Wert an.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$