Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
D. Rust

Präsenzübungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 14

Aufgabe 1

Untersuchen Sie, ob die Gleichung $F(x,y) = 0$ um den Punkt (x_0, y_0) nach y aufgelöst werden kann, d.h., ob eine Funktion $\varphi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $F(x, \varphi(x)) = 0$ und $\varphi(x_0) = y_0$ existiert. Falls ja, bestimmen Sie $\varphi'(x_0)$.

(a) $F(x,y) = e^{x^2+y^2} - e^2, \quad (x_0, y_0) = (1,1)$

(b) $F(x,y) = \sin x \cdot \cos y, \quad (x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(c) $F(x,y) = \sin x \cdot \cos y, \quad (x_0, y_0) = (0,0)$

(d) $F(x,y) = xye^{-x-y}, \quad (x_0, y_0) = (1,3)$

Aufgabe 2

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f((x,y)^T) = e^x \begin{pmatrix} \cos(y) \\ \sin(y) \end{pmatrix}$

(a) Für welche $(x,y)^T$ ist die Jacobimatrix $f'((x,y)^T)$ invertierbar? Bestimmen Sie auch die Ableitung der lokalen Umkehrfunktion in diesen Punkten.

(b) Ist f bijektiv? Wenn ja, geben Sie die Umkehrfunktion an. Wenn nein, finden Sie eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, sodass die Einschränkung von f auf U, also $f|_U : U \to f(U), (x,y)^T \to f((x,y)^T)$ bijektiv ist.

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

(a) $\iint\limits_{[-1,1]\times[0,2]} xye^{y^2} d(x,y)$

(b) $\int_P x + y \; d(x,y) \qquad \text{mit} \quad P = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le 1,\; 1-y \le x \le 2-y\right\}$

(c) $\int\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \cos(x)\cos(y)\cos(z) d(x,y,z)$

(d) $\int\limits_D \sqrt{2+x^2} \; d(x,y) \qquad \text{mit} \quad D = \left\{(x,y) \mid 0 \le y \le \sqrt{2+x^2},\; 0 \le x \le 2\right\}$