

Übungen zur Vorlesung Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 6

Aufgabe 1
Für welche a ist $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ a & -1 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Determinante!

(3 Punkte)

Aufgabe 2

a) Berechnen Sie die Zahl der Fehlstände der Transposition

$$\tau = (k\ell) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & \ell-1 & \ell & \ell+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & k-1 & \ell & k+1 & \cdots & \ell-1 & k & \ell+1 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ mit } k < \ell.$$

Wie lautet $\text{sign}(\tau)$?

b) Berechnen Sie $\tau = \sigma^{-1} \circ (12) \circ \sigma$, wobei $k := \sigma^{-1}(1), \ell := \sigma^{-1}(2)$.

Hinweis: Berechnen Sie $\tau(k), \tau(\ell)$ und $\tau(i)$ für $i \neq k, \ell$.

c) Begründen Sie, warum man jede Transposition $\tau = (k\ell)$ in der Form $\tau = \sigma^{-1} \circ (12) \circ \sigma$ darstellen kann. Wenn Sie alle σ angeben, für die $\tau = \sigma^{-1} \circ (12) \circ \sigma$ gilt, erhalten Sie einen Bonuspunkt.

(2+2+1 Punkte)

Aufgabe 3

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -a & -1 \\ 2 & 0 & -a^2 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatzes. Für welche a ist A invertierbar?

(3 Punkte)

Aufgabe 4

Eine reelle Matrix heißt ganzzahlig, wenn alle ihre Einträge Elemente aus \mathbb{Z} sind. Sei A eine ganzzahlige $n \times n$ -Matrix. Zeigen Sie: Gilt $\det A = \pm 1$, so ist A^{-1} ebenfalls ganzzahlig.

(1 Punkt)

Aufgabe 5

(Cramersche Regel) Sei A eine invertierbare Matrix. Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat dann für jeden Spaltenvektor b genau eine Lösung x . Sei \tilde{A}_i die Matrix, die man gewinnt, indem man in A die i -te Spalte durch b ersetzt. Zeigen Sie: Die Lösung von $Ax = b$ ist durch den Vektor

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{gegeben, wobei} \quad x_i = \frac{\det \tilde{A}_i}{\det A}.$$

Hinweis: Bilden Sie Matrizen X_i , indem Sie in der Einheitsmatrix E_n die i -te Spalte durch den Lösungsvektor x ersetzen. Was erhält man für AX_i ? Berechnen Sie die Determinante davon.

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 17.5.2019, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128