Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
F. Gähler

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 7

Aufgabe 1
Sei x ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:

a) x ist ein Eigenvektor von A^n für alle $n \geq 1$. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

b) Sei A invertierbar. Dann ist x auch Eigenvektor von A^{-1}. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

c) Sei A invertierbar. Dann ist x ein Eigenvektor von A^n für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wie lauten die entsprechenden Eigenwerte? [Hinweis: Vergessen Sie den Fall $n = 0$ nicht.]

d) Sei $B = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i A^i$ mit $a_i \in \mathbb{C}$. Dann ist x auch Eigenvektor von B. Wie lautet der entsprechende Eigenwert?

(1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Aufgabe 2
Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 3
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Sei x ein Eigenvektor von A^2 zum Eigenwert λ^2. Können wir daraus schließen, dass x auch ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist?

(1 Punkt)

– bitte wenden –

Aufgabe 4

a) Sei $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Eigenwerte von M, M^2 und M^3. Wie lauten ihre geometrischen Vielfachheiten?

b) Eine Matrix N heißt nilpotent, falls ein $s \in \mathbb{N}$ existiert, sodass N^s die Nullmatrix ist. Zeigen Sie, dass eine nilpotente Matrix N nur den Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt.

c) Sei N eine $n \times n$-Matrix, für die $N^n \neq \mathbf{0}$ gilt. Kann N nilpotent sein?
Hinweis: Betrachten Sie die Kerne der Matrizen N^k. Was lässt sich über deren Dimension sagen?

(3 + 1 + 3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 24.5.2019, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128