**Universität Bielefeld** **Sommersemester 2019**
**F. Gähler**

## Übungen zur Vorlesung

# Mathematik für Naturwissenschaften II

**Blatt 8**

**Aufgabe 1**
Sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Trigonalisieren Sie die Matrix $A$.
*Hinweis:* Verwenden Sie das rekursive Verfahren, das im Beweis des Satzes über die Trigonalisierbarkeit verwendet wurde.

b) Sei $S$ eine Matrix, mit der $A$ auf obere Dreiecksform gebracht werden kann. Ist $S$ eindeutig bestimmt? Ist die obere Dreiecksform eindeutig festgelegt? (Begründung!)

**(3 + 1 Punkte)**

**Aufgabe 2**
Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

besitzt den Eigenvektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Beachten Sie, dass die erste Spalte ein Vielfaches der zweiten Spalte ist. Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $A$, ohne das charakteristische Polynom zu berechnen.

**(2 Punkte)**

**– bitte wenden –**

**Aufgabe 3**
Sei $V = \ell_\infty$ der Vektorraum der beschränkten Folgen, d. h. $\ell_\infty := \{(x_i)_{i=1}^\infty | \max\limits_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}$.

a) Zeigen Sie: Auf $\ell_\infty$ ist durch $||x|| := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}|x_k|$ eine Norm definiert.

b) Sei $e^{(n)} := \underset{\uparrow n\text{-te Stelle}}{(0,\ldots,0,1,0,\ldots)}$. Dann ist durch $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ eine Folge in $\ell_\infty$ definiert. Zeigen Sie, dass $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ gegen $0 = (0,\ldots 0,\ldots)$ konvergiert.

c) Konvergiert die obige Folge $(e^{(n)})_{n=1}^\infty$ auch in der Maximumsnorm?

d) Sind die beiden Normen äquivalent, d. h. lassen sich Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$ finden, sodass $||x||_\infty \leq c_1||x||$ und $||x|| \leq c_2||x||_\infty$ für alle $x \in \ell_\infty$ gilt?

**(2 + 1 + 1 + 1 Punkte)**

**Aufgabe 4**
Sei $V$ der Vektorraum der reellen Polynome auf $\mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass durch
$$\langle p, q\rangle := \int\limits_0^\infty e^{-x}p(x)q(x)dx$$
ein inneres Produkt auf $V$ definiert ist.

b) Sei $P_n$ das Monom $P_n(x) = x^n$. Berechnen Sie $\langle P_n, P_m\rangle$.

c) Geben Sie Polynome an, die auf $P_0(x) \equiv 1$ orthogonal stehen.

**(2 + 2 + 1 Punkte)**

**Abgabe bis Freitag, 31.5.2019, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128**