Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
F. Gähler

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaften II
Blatt 9

Aufgabe 1
Seien A und B hermitesche Matrizen. Sind dann auch $A+B, AB, iA$ und $AB+BA$ hermitesche Matrizen?

(2 Punkte)

Aufgabe 2
Im $\mathbb{R}^3$ sei die Basis $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ mit $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

a) Sei $U = \{cb_1 \mid c \in \mathbb{R}\}$. Berechnen Sie bezüglich des Standardskalarprodukts eine Orthonormalbasis von $U^\perp$, indem Sie das Gram-Schmidt'sche Orthogonalisierungsverfahren auf $\mathcal{B}$ anwenden. Die so erhaltene Basis heiße $\mathcal{B}'$.

b) Berechnen Sie die Gram'sche Matrix von $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$.

(3 + 1 Punkte)

Aufgabe 3
Sei V ein Euklidischer Vektorraum und U eine beliebige Teilmenge von V.

a) Zeigen Sie, dass $U^\perp := \{x \mid \langle x, y \rangle = 0 \ \forall \ y \in U\}$ ein Unterraum von V ist.

b) Sei $V = \mathbb{R}^3$. Seien $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \\ a-b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Berechnen Sie $U_1^\perp$ und $U_2^\perp$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

c) Sei V endlich-dimensional. Warum kann $(U^\perp)^\perp = U$ nur dann gelten, wenn U ein Unterraum von V ist?

(2 + 2 + 1 Punkte)

– bitte wenden –

Aufgabe 4

Sei $C^0[a,b]$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf $[a,b]$.

a) Sei c eine strikt positive stetige Funktion auf $[a,b]$. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f,g\rangle := \int\limits_a^b c(x)f(x)g(x)\,dx$$

ein inneres Produkt auf $C^0[a,b]$ definiert ist.

b) Wenn wir nun c durch

$$c(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \setminus \{\frac{a+b}{2}\} \\ -1 & x = \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

definieren, ist dann

$$\langle f,g\rangle := \int\limits_a^b c(x)f(x)g(x)\,dx$$

noch immer ein inneres Produkt?

c) Ist durch

$$\langle f,g\rangle := \int\limits_{\frac{a+b}{2}}^b c(x)f(x)g(x)\,dx$$

ein inneres Produkt definiert, wenn man c geeignet wählt? Warum?

(2 + 1 + 1 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 7.6.2019, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128