Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
F. Gähler

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 11

Aufgabe 1
Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A, sowie die zugehörige Basis aus Eigenvektoren.

b) Bestimmen Sie die dazu duale Basis, und zeigen Sie, dass die dualen Basisvektoren linksseitige Eigenvektoren von A zu denselben Eigenwerten sind. Linksseitige Eigenvektoren sind Zeilenvektoren, welche eine Eigenwertgleichung $xA = \lambda x$ erfüllen.

c) Geben Sie für A eine Spektralzerlegung $A = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ an, mit Projektoren P_i, welche den einen Eigenvektor von A im Bild, und den anderen im Kern haben. Sind diese Projektoren orthogonal?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2

a) Seien A und B hermitesche Matrizen. Zeigen Sie, dass AB hermitesch ist, wenn die Matrizen A und B vertauschen.

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie die dazu duale Basis.

c) Eine hermitesche Matrix A besitze die Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 3$. Ein Eigenvektor zu λ_1 sei $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wie lautet der Eigenraum zu λ_2?

(1+2+1 Punkte)

Aufgabe 3

a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

b) Ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ diagonalisierbar? Welche Eigenwerte hat B, und was sind deren algebraische und geometrische Vielfachheiten?
Hinweis: Berechnen Sie zuerst B^2, und ziehen Sie daraus Ihre Schlüsse!

c) Eine Matrix C erfülle die Gleichung $C^3 = -C$. Welche komplexen Zahlen λ kommen dann als Eigenwerte von C in Frage?

(2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 21.6.2019, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128