Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
F. Gähler

Übungen zur Vorlesung
Mathematik für Naturwissenschaften II
Blatt 12

Aufgabe 1
Im Folgenden sei A eine $d \times d$-Matrix, und $B_n := \sum_{j=0}^{n} A^j$.

a) Zeigen Sie, dass $A \cdot B_n = B_n \cdot A$ gilt, und weisen Sie die Formel $(E_d - A) \cdot B_n = E_d - A^{n+1}$ nach.

b) Nun erfülle A zusätzlich die Bedingung $||A|| < 1$. Leiten Sie daraus ab, dass jeder Eigenwert λ von A die Ungleichung $|\lambda| < 1$ erfüllen muss.

c) Zeigen Sie (unter der Annahme von (b)), dass $E_d - A$ invertierbar ist.

d) Folgern Sie nun, dass $B_n = (E_d - A^{n+1})(E_d - A)^{-1}$, und untersuchen Sie den Grenzwert $n \to \infty$.

(2+1+1+1 Punkte)

Aufgabe 2

a) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R})$ fest. Zeigen Sie, dass die Matrizen $M(t) = e^{tA}$, $t \in \mathbb{R}$, eine Gruppe bilden. Wie sieht die Gruppenmultiplikation aus?

b) Bestimmen Sie die Menge der Matrizen A, für welche die Matrizen $M(t) = e^{tA}$ alle orthogonal sind.

c) Bestimmen Sie die Menge der Matrizen A, für welche die Matrizen $M(t) = e^{itA}$ alle unitär sind (beachten Sie das zusätzliche i im Exponenten). Was ändert sich, wenn man statt unitärer Matrizen spezielle unitäre haben will?

Hinweis: Betrachten Sie auch Ableitungen nach dem Gruppenparameter t an der Stelle $t = 0$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 3
Eine reelle orthogonale $n \times n$-Matrix heißt Spiegelung, wenn sie nur die Eigenwerte ± 1 besitzt und der Eigenwert -1 die algebraische Vielfachheit 1 besitzt. Zeigen Sie, dass

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung ist. Diagonalisieren Sie A.

Hinweis: $\sin\varphi = 2\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\frac{\varphi}{2})$, $\quad 1 + \cos\varphi = 2\cos^2(\frac{\varphi}{2})$, $\quad 1 - \cos\varphi = 2\sin^2(\frac{\varphi}{2})$

(3 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 28.6.2019, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128