Universität Bielefeld **Sommersemester 2019**
D. Rust

Übungen zur Vorlesung

Mathematik für Naturwissenschaften II

Blatt 13

Aufgabe 1
Sei $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine Funktion, gegebn durch

$$F(x, y) = f(g(x, y), h(x, y)),$$

wobei

$$f(s, t) = (s, t^2, t + s),\ g(x, y) = x + y^2,\ h(x, y) = x^5 y.$$

Benutzen Sie die Kettenregel, um die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ und $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ zu bestimmen.

(4 Punkte)

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die lokalen Extrema der folgenden Funktionen.

(a) $f((x, y)^T) = x^2 - (2y - 1)^2$.

(b) $f((x, y)^T) = (4x^2 + y^2) \exp(-x^2 - 4y^2)$.

(2+6 Punkte)

Aufgabe 3
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, g\colon U \to \mathbb{R}^m$ total differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch $\alpha f + \beta g\colon U \to \mathbb{R}^m$, gegeben durch $(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ total differenzierbar ist und es gilt

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

Hinweis. Totale Differenzierbarkeit einer Funktion f im Punkt x bedeutet, dass man schreiben kann

$$f(x + \xi) = f(x) + f'(x)\xi + \|\xi\|\varphi(\xi)$$

mit einer $m \times n$-Matrix $f'(x)$ und einer Fehlerfunktion φ, die nullkonvergent ist. Solche Identitäten nehmen Sie hier für f bzw. g an und leiten daraus eine entsprechende Identität (mit $m \times n$-Matrix $\alpha f'(x) + \beta g'(x)$) für die neue Funktion $\alpha f + \beta g$ ab. Ist die neue Fehlerfunktion tatsächlich nullkonvergent?

(4 Punkte)

Abgabe bis Freitag, 05.07.2019, 12.00 Uhr, in den Postfächern der Tutoren im Kopierraum V3-128