Übungsblatt 27

131) Bestimme für die Basis $b_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ des dreidimensionalen euklidischen Raumes (d. h. $\mathbb{R}^3$, versehen mit der Standardbilinearform) die duale Basis b_1^*, b_2^*, b_3^* und die kontravariante (reziproke) Basis b^1, b^2, b^3 . Stelle das lineare Funktional $f(x) = 3\xi^1 + 4\xi^2 + 5\xi^3$ als Linearkombination in der dualen Basis dar.

132) Für $\alpha \in [0,1]$ sei auf $C^0[0,1]$ ein lineares Funktional mittels $\delta_\alpha(F) := F(\alpha)$ definiert. Zeige mit δ_α, dass der Monomorphismus $v \longmapsto f(v,\cdot)$ von 20.2 (v) keinen Isomorphismus zwischen V und V^* darstellt, wenn $f(u,v) := \int_0^1 u(t)v(t)dt$ ist. Hinweis: Wende einerseits δ_α auf eine Funktion an, die außerhalb von $[x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ verschwindet und innerhalb positiv ist, und andererseits auf die konstante Funktion $F(x) \equiv 1$.

133) Zeige, dass sich die Koordinaten des Gradienten kontragredient zu den (kontravarianten) Koordinaten eines Vektors transformieren, der Gradient einer Funktion also ein kovariantes Tensorfeld repräsentiert.

134) Bestimme den Fundamentaltensor g_{ij} in Zylinder- und Kugelkoordinaten.

135) Die Koordinaten eines Tensors 2, Stufe seien in rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten gegeben als

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \xi_1\xi_3 \\ 0 & (\xi_2)^2 & 0 \\ \xi_2\xi_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Berechne die kovarianten, kontravarianten und gemischten Koordinaten dieses Tensors in Zylinderkoordinaten .