Abgabe: 31. 10. 2002

D. Garbe: Mathematik III für Naturwissenschaftliche Informatik

Übungsblatt 28

Aufgabe 136: Es seien $\omega_1 \in \Lambda^{k_1}(V), \ldots, \omega_m \in \Lambda^{k_m}(V)$. Zeige:

a) $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m = \dfrac{1}{k_1! \ldots k_m!} \sum\limits_{P \in S_{k_1+\ldots+k_m}} \operatorname{sgn} P \cdot P(S_1 \otimes \ldots \otimes S_m)$

b) $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m(v_1, \ldots v_m) = \operatorname{Det}(\omega_i(v_j))$ für $v_1, \ldots v_m \in V$ und $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \Lambda^1(V)$

c) $\omega_{P1} \wedge \ldots \wedge \omega_{Pm} = \operatorname{sgn} P \cdot \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_m$ für $P \in S_m$ und $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \Lambda^1(V)$

Aufgabe 137: Zeige, dass $\operatorname{sgn} P$ statt wie in 9.13(v) auch äquivalent definiert werden kann durch: $\operatorname{sgn} P = (-1)^{I(P)}$, wobei $I(P)$ die Anzahl aller Inversionen von P ist und eine Inversion durch das gleichzeitige Auftreten von $i < j$, $P(i) > P(j)$ gekennzeichnet ist.

Aufgabe 138: Es seien $S \in L^k(V),\ T \in L^m(V)$. Zeige: $\operatorname{Alt}(S \otimes T) = (-1)^{km} \operatorname{Alt}(T \otimes S)$.
Hinweis: Überlege zunächst, dass für die durch

$$P(i) = \begin{cases} m+i & \text{für } i = 1, \ldots, k \\ i-k & \text{für } i = k+1, \ldots, k+m \end{cases}$$

definierte Permutation $P \in S_{k+m}$ gilt : $\operatorname{sgn} P = (-1)^{km}$.

Aufgabe 139: Beweise - ausgehend von der Definition des Kreuzproduktes in 21.4(iv) - die folgenden Eigenschaften des Kreuzproduktes in $\mathbb{R}^3$: $e_1 \times e_2 = e_3$; $a \times a = 0$; $a \times b = -b \times a$; $|a \times b| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \sphericalangle(a,b) = \sqrt{<a,a><b,b> - <a,b>^2}$; $a \times (b \times c) = <a,c> b + <a,b> c$; $a \times b = (\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)e_1 + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)e_2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3$.

Aufgabe 140: Sei $\omega \in \Lambda^n(V)$ das für das innere Produkt $<\ ,\ >$ definierte Volumenelement des orientierten euklidischen Vektorraumes V der Dimension n. Zeige, dass $|\omega(x_1, \ldots, x_n)| = \sqrt{\operatorname{Det}(<x_i, x_j>)}$ gilt, wenn $x_1, \ldots, x_n \in V$ sind.