Abgabe: 14. 11. 2002

D. Garbe: Mathematik III für Naturwissenschaftliche Informatik

Übungsblatt 30

Aufgabe 146: Gegeben sei das Vektorfeld $v = (\xi^2, \eta^2\zeta, \zeta)^t$. Zu berechnen ist das Flächenintegral $\int\limits_T < v, d\mathfrak{F} >$ über die Oberfläche des Tetraeders, das von den Koordinatenebenen und der Ebene $\xi + \eta + \zeta = 1$ begrenzt wird. Die Berechnung ist sowohl direkt als auch mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes durchzuführen, so dass damit dann die Aussage des Satzes von Stokes für den vorliegenden Spezialfall bewiesen ist.

Aufgabe 147: Beweise $\int\limits_F d\mathfrak{F} \times \operatorname{grad} f = \int\limits_{\partial F} f d\mathfrak{S}$.

(f sei $C^{(1)}$, ∂F eine geschlossene $C^{(1)}$-Kurve, die Rand der kompakten 2-dimensionalen $C^{(1)}$-Untermannigfaltigkeit F des $\mathbb{R}^3$ sei.

Aufgabe 148: Gegeben sei das Vektorfeld $v = (f^1, f^2, f^3)^t$ mit $f^1 = -\frac{\eta}{\xi^2+\eta^2}$, $f^2 = \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2}$, $f^3 = 1$. Berechne $\operatorname{rot} v$ sowie $\int\limits_E < v, d\mathfrak{S} >$, wobei E der Einheitskreis in der ξ, η-Ebene sei. Weshalb steht das Ergebnis nicht im Widerspruch zum Satz von Stokes?

Aufgabe 149: Berechne für konstantes $a \in \mathbb{R}^3$ den Wert der folgenden Felder auf $\mathbb{R}^3$ und schreibe die Ergebnisse in möglichst geschlossener Form als Funktionen von a und x:

a) $\operatorname{div}(x \times \operatorname{rot} x)$ b) $\operatorname{grad}(< x, x >< a \times x, a \times x >)$

c) $\operatorname{div}(a \times (a \times x))$ d) $\operatorname{rot}(x \times (x \times a))$.

Aufgabe 150: Eine starre 3-dimensionale Kugel K drehe sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die ζ-Achse. Die Geschwindigkeit des Kugelpunktes mit Ortsvektor x beträgt dann $v = w \times x$, wobei $w = \omega e_3$ ist. Bestätige durch Ausrechnen beider Seiten die Formel $\int\limits_{\partial K} d\mathfrak{F} \times v = \int\limits_K \operatorname{rot} v dV$.