Abgabe: 21. 11. 2002

D. Garbe: Mathematik III für Naturwissenschaftliche Informatik

Übungsblatt 31

Aufgabe 151: Beweise die Relationen

$$\operatorname{grad} < v, w > = < w, \nabla > v + < v, \nabla > w + w \times \operatorname{rot} v + v \times \operatorname{rot} w$$

sowie

$$< v, \nabla > = \operatorname{rot} v \times v + \frac{1}{2} \operatorname{grad} < v, v > \quad .$$

Dabei ist $< a, \nabla > v := \alpha^1 \frac{\partial v}{\partial \xi^1} + \alpha^2 \frac{\partial v}{\partial \xi^2} + \alpha^3 \frac{\partial v}{\partial \xi^3}$ der sog. **Vektorgradient**, wobei $\frac{\partial v}{\partial \xi^i} := (\frac{\partial v^1}{\partial \xi^i}, \frac{\partial v^2}{\partial \xi^i}, \frac{\partial v^3}{\partial \xi^i})^t$ ist.

Aufgabe 152: Es seien A eine kompakte Teilmenge einer orientierten 2-dimensinalen $C^{(1)}$-Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ mit glattem Rand ∂A und f, g reellwertige Feldfunktionen. Beweise mit Hilfe des Stokesschen Satzes, dass dann

$$\int_A < \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g, d\mathfrak{F} > = \int_{\partial A} f dg$$

gilt.

Aufgabe 153: Gegeben sei das Vektorfeld $v(\xi, \eta, \zeta) = (\xi^3, \xi^2\eta, \xi^2\zeta)^t$. Berechne das Integral $\int\int < v, n > dF$ über die Oberfläche der Kugel $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \alpha^2$.

Aufgabe 154: Berechne längs $\gamma : z = \rho e^{it} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$
a) $\displaystyle\int_\gamma |z-1|^2 |dz|$, b) $\displaystyle\int_{\gamma\,,\,\rho=1} |z-1||dz|$ (Was ist für $\rho \neq 1$?) c) $\displaystyle\lim_{\rho\to\infty} \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz$.

Aufgabe 155: γ sei ein beliebiger doppelpunktfreier Weg von -1 nach $+1$, der weder $+i$ noch $-i$ durchläuft. Welcher Werte ist $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$ fähig?