# Kapitel 10

# Formen auf Vektorräumen

**10.1 Definitionen :** Sei $V$ ein $K$-Vektorraum und $\alpha$ ein Automorphismus von $K$. Eine **$\alpha$-Sesquilinearform** auf $V$ ist eine Abbildung $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ mit folgenden Eigenschaften:

$f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \quad ,$
$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) \quad ,$
$f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \quad ,$
$f(x, \lambda y) = f(x, y)\lambda^\alpha$ für alle $x_i, y_i, x, y \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$.
$x$ heißt **orthogonal** zu $y$, geschrieben $x \perp y$, wenn $f(x, y) = 0$ gilt. (Wir betrachten nur Formen, für die $x \perp y \longleftrightarrow y \perp x$ gilt, sogenannte **reflexive** Formen.) $f$ heißt **nichtausgeartet**, wenn $f(a, V) = 0$ stets $a = 0$ impliziert. $f$ heißt **$\varepsilon$-hermitesch** , wenn $f(x, y) = \varepsilon f(y, x)^\alpha \; \forall x, y \in V$ gilt ($\varepsilon = +1$ oder $-1$).

***Charles Hermite***
***(1822 - 1901)***

[1]

Gilt $f(x, x) = 0 \forall x \in V$, so heißt $f$ **alternierend**. Gilt $f(x, y) = f(y, x)$, so heißt $f$ **symmetrische Bilinearform**; gilt $f(x, y) = -f(y, x) \; \forall x, y \in V$, so heißt $f$ **schiefsymmetrisch**.
Wenn $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von $V$ ist, so heißt $M_B(f)$ $:= f(b_i, b_j) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ die **Matrix der Form**. $f$ heißt **positiv definit**, wenn

[1]Benannt nach dem Pariser Mathematiker Charles Hermite, der bedeutende Arbeiten in den Gebieten Analysis, Algebra und Zahlentheorie vorlegte. Er bewies auch die Transzendenz von e.

$f(x,x) > 0 \forall x \in V \setminus \{0\}$ gilt, und **positiv semidefinit**, wenn $f(x,x) \geq 0$ gilt; wenn dagegen $f$ positive und negative Werte Formenwerte annimmt, so **indefinit**. (Entsprechend werden die Begriffe **negativ definit**, … definiert.)

Positiv definite hermitesche Formen ($\varepsilon = 1$) nennen wir ein **Skalarprodukt** auf $V$. $V$ heißt dann auch ein **Prä-Hilbert-Raum** oder genauer: für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ein **euklidischer** Vektorraum bzw. für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ein **unitärer** Vektorraum (In Prä-Hilbert-Räumen wird $f(x,y)$ oft als $\langle x, y \rangle$ geschrieben).

***David Hilbert***
***(1863 - 1943)***

**Slogan:** Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn der Formenwert für sie Null ist. Nichtausgeartetsein bedeutet: Nur der Nullvektor steht auf allen Vektoren senkrecht.

**10.2 Bemerkungen :**

(i) Sesquilinear bedeutet eineinhalbfach-linear (lat.), nämlich linear in der ersten und semilinear (halblinear) in der zweiten Komponente.

Die qualitative Klassifikation der Sesquilinearformen geht zurück auf Birkhoff-v.Neumann.
Es läßt sich für nichtausgeartete Sesquilinearformen $f$ auf Vektorräumen der Dimension $\geq 2$ zeigen:

$f$ ist genau dann reflexiv, wenn $f$ eine alternierende Form mit $\alpha = \mathrm{id}$ ist oder wenn es ein $\lambda \in K \setminus \{0\}$ so gibt, daß $g := f\lambda^{-1}$ eine hermitesche $\alpha$-Sesquilinearform mit $\alpha^2 = \mathrm{id}$ ist.

Diese Aussage läßt sich auch über Schiefkörpern beweisen, wobei $\alpha$ ein Antiautomorphismus von $K$ sei. Dieses Resultat erklärt erst, warum in der Geometrie der Formen und ihrer Isometriegruppen ausgerechnet die drei Fälle der orthogonalen, der unitären und der symplektischen Gruppen betrachtet werden.

(ii) In einer endlichen Basis $B$ läßt sich $f$ ausdrücken als $f(x,y) = \phi_B(x)^t M_B(f)\phi_B(y)^\alpha$, z.B. im Spezialfall $M_B(f) = E$ erhalten wir das **Standardskalarprodukt** $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i^\alpha$.
**Denn:** $f(x,y) = f(\sum \xi_i b_i, \sum \eta_j b_j) = \sum_{i,j} \xi_i f(b_i,b_j)\eta_j^\alpha$ mit $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$.

(iii)

Ein anderes wichtiges Beispiel ist die **Minkowski-Form, Lorentz-Form** , die das Raum-Zeit-Kontinuum der speziellen Relativitätstheorie prägt: $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\xi_3\eta_3-\xi_4\eta_4$ ($\xi_1, \xi_2, \xi_3$ sind die räumlichen Koordinaten, $\xi_4$ ist die Zeitkoordinate).

***Hermann Minkowski (1864 - 1909)***

(iv) Jeder Prä-Hilbert-Raum wird vermittels $\|x\| := \sqrt{\langle x,x\rangle}$ zu einem normierten Vektorraum. Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung folgt zum Beispiel mit 10.4(iii); denn es gilt $\|x+y\|^2 \leq \langle x+y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2Re\langle x,y\rangle \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$ .

Die Standardbilinearform liefert die in 5.2 (ii) eingeführte euklidische Norm.

Die Standardbilinearform wird auch bisweilen als Produkt geschrieben: $\langle x,y\rangle = x \cdot y$, sog. **Skalarprodukt oder inneres Produkt**. Erinnere 7.26, 7.27 (i): $x \cdot y = \|x\|\|y\| \cos(x,y)$. Anwendung in der Physik: Bei konstanter Kraft $\mathfrak{K}$ wird die Arbeit längs des geradlinigen Weges $\mathfrak{S}$ zu $\mathfrak{A} = \langle \mathfrak{K}, \mathfrak{S}\rangle$.

(v) Jetzt geben wir das Beispiel eines Prä-Hilbert-Raumes an, wo die Form **nicht** die Standardbilinearform ist: Sei $V$ der Raum der komplexwertigen, auf $[0, 2\pi]$ stetigen Funktionen.

$\langle f,g\rangle := (2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} f\overline{g}\ dx$ macht $V$ zu einem unitären Raum, da $\langle f,f\rangle = (2\pi)^{-1}\int \|f\|^2\ dx > 0$ für $f \neq 0$ gilt. Für $k \neq l$ gilt $e^{ikx}\perp e^{ilx}$, da $(2\pi)^{-1}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-ilx}\ dx = \begin{cases} 1 & \text{für } k=1 \\ 0 & \text{für } k \neq 1 \end{cases}$ ist.

(vi) Im Endlichdimensionalen gilt für die Matrix $M_B(f)$ einer hermiteschen Form: $M_B(f) = \overline{M_B(f)^t}$. Daher heißen Matrizen $A$ mit $A = \overline{A^t}$ **hermitesch**, solche mit $A = A^t$ **symmetrisch**, mit $A = -A^t$ **schiefsymmetrisch**, mit $A = -\overline{A^t}$ **schiefhermitesch**.
**Denn:** Wegen $f(x,y) = \overline{f(x,y)}$ gilt $\varphi_B(x)^t M_B(f)\overline{\varphi_B(y)} = \overline{\varphi_B(y)^t M_B(f)\overline{\varphi_B(x)}} = \overline{(\varphi_B(y)^t M_B(f)\overline{\varphi_B(x)})^t} = \overline{\overline{\varphi_B(x)^t} M_B(f)^t \varphi_B(y)} = \varphi_B(x)^t \overline{M_B(f)}^t \overline{\varphi_B(y)}$.

(vii) Für jede nichtausgeartete (endl.-dim.) Sesquilinearform f gilt Det $M_B(f) \neq 0$. **Denn:** Jede Lösung von $x^t M_B(f) = 0$ erfüllt $x^t M_B(f) V = 0$, also $x \perp V$. Wegen der Nichtausgeartetheit von f ist notwendig $x = 0$, also $n = \mathrm{Rg} M_B(f)$.

**10.3 Definitionen :** Sei $\{U_1,\ldots,U_m\}$ eine Menge von Untervektorräumen des $K$-Vektorraumes $V$. $V$ heißt **direkte Summe** von $U_1,\ldots,U_m$, geschrieben $V = \bigoplus_{i=1}^m U_i$, wenn $V = \sum_{i=1}^m U_i$ und $U_i \cap (\sum_{j=1}^{i-1} U_j + \sum_{j=i+1}^m U_j) = \{0\} \quad \forall i = 1,\ldots,m$ gilt.

Ein Vektorraum $V$ mit Sesquilinearform $f$ heißt **orthogonale direkte Summe** von $U_1,\ldots,U_m$, geschrieben $\perp_{i=1}^m U_i$, wenn er direkte Summe der $U_i$ ist und überdies für alle $u_i \in U_i, u_j \in U_j$ mit $i \neq j$ stets $u_i \perp u_j$ gilt. Eine Menge $M = \{m_i : i \in I\}$ heißt eine **Orthogonalmenge (OG-Menge)**, wenn $f(m_i,m_j) = 0$ für alle $i,j \in I, i \neq j$ ist, und sie heißt **Orthonormalmenge (ON-Menge)**, wenn sogar $f(m_i,m_j) = \delta_{ij}$ [2] ist.

Ist die Menge $M$ überdies eine Basis, so sprechen wir von einer **Orthogonal-** bzw. **Orthonormalbasis**. Wenn $M \subset V$, so heißt $M^\perp := \{x \in V : \bigwedge_{m \in M} x \perp m\}$ der zu $M$ **orthogonale Raum**. Wenn $x \in \{x\}^\perp$, so heißt der Vektor $x$ **isotrop**.

Wenn $\{b_1,\ldots,b_m\}$ eine OG-Basis eines linearen Teilraumes $U$ ist mit $b_1,\ldots,b_m$ nicht isotrop und $v \in V$, so heißt $\pi_U v := \sum_{i=1}^m \frac{f(v,b_i)}{f(b_i,b_i)} b_i$ die **Orthogonalprojektion** von $v$ auf $U$.

---

[2] Kronecker-Delta: $\delta_{kl} := \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases}$

**10.4 Bemerkungen :**

(i) $M^{\perp}$ ist linearer Teilraum von $V$.

(ii)

$v - \pi_U v \in U^{\perp}$, daher ist der Name Orthogonalprojektion gerechtfertigt.
**Denn:** Es gilt $f(v - \pi_U v, b_j) = f(v, b_j) - \sum_{i=1}^{m} \frac{f(v,b_i)}{f(b_i,b_i)} f(b_i, b_j) = f(v, b_j) - f(v, b_j) = 0$.

(iii) In Prä-Hilbert-Räumen gilt die CSB-Ungleichung : $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ .
**Denn:** Es gilt $0 \leq \langle x - \pi_{Ky}x, x - \pi_{Ky}x\rangle = \langle x, x\rangle - \langle \pi_{Ky}x, x\rangle - \langle x - \pi_{Ky}x, \pi_{Ky}x\rangle$ . Da nach (ii) $x - \pi_{Ky}x \perp y$ und $\pi_{Ky}x \in Ky$ gilt, ist der dritte Summand der letzten Gleichung 0 , und wir erhalten: $0 \leq \langle x, x\rangle - \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle y,y\rangle}$. Mithin gilt $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$ .

(iv) Isotrope Vektoren existieren z. B. im **Minkowski-Raum** ( , d. h., im $\mathbf{R}^4$ mit Minkowski-Form ). In der Relativitätstheorie werden diese Vektoren **lichtartige Vektoren** genannt.

**10.5 Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt :**[3] Sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $V$ aus nichtisotropen Vektoren. Dann bilden $b_1^* := b_1, \ldots, b_i^* := b_i - \pi_{\langle b_1^*,\ldots,b_{i-1}^*\rangle} b_i, \ldots, b_n^*$ eine Orthogonalbasis für $V$.

**10.6 Bemerkungen :**

(i) Es ist genau dann $V = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$, wenn
$\forall v \in V \exists_1 (u_1, \ldots, u_m) \in U_1 \times \ldots \times U_m : v = \sum_{i=1}^{m} u_i$.
**Denn:** Wenn jedes $v \in V$ wie beschrieben eindeutig darstellbar ist, so gilt natürlich $v = \sum_{i=1}^{m} U_i$. Wenn $0 \neq v \in U_i \cap (\sum_{j=1}^{i-1} U_j + \sum_{j=i+1}^{m} U_j)$ wäre, so gälte nach Voraussetzung $v = u_i = \sum_{j\neq i} u_j$, also ergäbe sich ein Widerspruch zur vorausgesetzten Eindeutigkeit. Mithin gilt also $U_i \cap$

[3]Jorgen Pedersen Gram (1850 - 1916), Erhard Schmidt (1876 -1959)

$(\sum_{j=1}^{i-1} + \sum_{j=i+1}^{m}) = \{0\}$, also $V = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$.

Sei umgekehrt $V = \bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ vorausgesetzt. Wegen $V = \sum_i U_i$ ist $v$ als $\sum_{i=1}^{m} u_i$ mit $u_i \in U_i$ darstellbar. Angenommen es gälte $v = \sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{i=1}^{m} u_i'$ mit $u_i, u_i' \in U_i$. Dann wäre $u_i - u_i' = -\sum_{j \neq i}(u_j - u_j') \in U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}$, also $u_i = u_i'$, und zwar für jedes $i = 1, \ldots, m$. □

(ii) Wenn $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von $V$ ist, so gilt $V = \bigoplus_{i=1}^{n} Kb_i$.
Wenn $b_1, \ldots, b_n$ eine Orthogonalbasis von $V$ ist, so gilt $V = \perp_{i=1}^{n} Kb_i$.

(iii) Es gilt $\langle M \rangle < M^{\perp\perp}$. In endlich-dimensionalen Vektorräumen gilt sogar Gleichheit (vgl. (xi)).
**Denn:** Wenn $m \in M$ und $m' \in M^{\perp}$ ist, so gilt $m \perp m'$ und mithin $m \in (M^{\perp})^{\perp}$, also $\langle M \rangle \subset M^{\perp\perp}$. Da $M^{\perp}$ und ebenso $M^{\perp\perp}$ ein Vektorraum ist, gilt $\langle M \rangle < M^{\perp\perp}$.

(iv) Es gilt $\operatorname{Dim} \bigoplus_{i=1}^{m} U_i = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{Dim} U_i$.
**Denn:** Wähle für $i = 1, \ldots, m$ jeweils eine Basis $B_i$ von $U_i$. Überlege, daß dann $\bigcup_{i=1}^{m} B_i$ eine Basis von $\bigoplus_{i=1}^{m} U_i$ ist.

(v) Koordinatentransformation einer Basis $b_1, \ldots, b_n$ in eine vorgegebene Orthonormalbasis $b_1', \ldots, b_n'$: Wenn $x = \sum \xi_i b_i = \sum \xi_i' b_i'$ ist, so gilt $\xi_k' = \sum \xi_i f(b_i, b_k')$, wobei im Falle der Standardbilinearform die $f(b_i, b_k')$ die sogenannten **Richtungscosinus** sind.

(vi) Jede Orthogonalmenge aus nichtisotropen Vektoren ist linear unabhängig.
**Denn:** Sei $\{b_1, \ldots, b_m\}$ eine Orthogonalmenge, und sei $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i = 0$. Dann gilt
$\alpha_j f(b_j, b_j) = f(0, b_j) = 0$, also $\alpha_j = 0 \quad \forall j$.

(vii) Wenn $b_1, \ldots, b_m$ eine Orthogonalmenge aus nichtisotropen Vektoren ist, so läßt sich jedes $x \in \bigoplus \mathbb{K} b_i$ eindeutig als Linearkombination $x = \sum \lambda_i b_i$ schreiben, wobei die $\lambda_i = \frac{f(x, b_i)}{f(b_i, b_i)}$ sind und **verallgemeinerte Fourierkoeffizienten** heißen.

(viii) Es seien $U < V$, $b_1, \ldots, b_m$ eine Orthogonalbasis von $U$ aus nichtisotropen Vektoren, $f|_U$ nicht ausgeartet. Dann hat jedes $x \in V$ eine

eindeutige Darstellung $x = x_U + x_{U^\perp}$ mit $x_U \in U, x_{U^\perp} \in U^\perp$. Es gilt also $V = U \perp U^\perp$.
**Denn:** Setze $x_U := \pi_U x$, $x_{U^\perp} := x - \pi_U x$ und erhalte eine solche Darstellung ( der zweite Vektor ist nach 10.4(ii) $\in U^\perp$ ). Sei nun $x = x_U + x_{U^\perp} = x'_U + x'_{U^\perp}$ , also $U \ni x_U - x'_U = x'_{U^\perp} - x_{U^\perp} \in U^\perp$. Da $f\ |_U$ nichtausgeartet ist, ist $x_{U^\perp} = x'_{U^\perp}$ und somit auch $x_U = x'_U$.

(ix) Die Voraussetzungen seien wie in (viii). Dann gilt: Die eindeutig bestimmte U-Komponente von x in der Zerlegung $V = U \perp U^\perp$ ist die Orthogonalprojektion $\pi_U x$.

(x) Sei $f$ eine reflexive Sesquilinearform auf einem endlichdimensionalen Vektorraum $V$ und sei $U < V$. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen:
$f|_U$ nichtausgeartet $\longleftrightarrow U \cap U^\perp = \{0\} \longleftrightarrow U \perp U^\perp = V$
$\longleftrightarrow \exists_1 W < V : V = U \perp W$.
Im letzten Fall heißt $W$ ein **orthogonales Komplement** von $U$ in $V$.
**Denn:**

(I) Genau wenn $f\ |_U$ ausgeartet ist, existiert $v \in U \setminus \{0\}$ so, daß $v \in U^\perp$. Das beweist den ersten Doppelpfeil.

(II) Wir führen hier den Beweis für den zweiten Doppelpfeil nur für den Spezialfall eines Prä-Hilbertraumes V: Für nichtausgeartetes $f\ |_U$ gilt nach (viii) $V = U \perp U^\perp$. Umgekehrt impliziert $V = U \perp U^\perp$ natürlich $U \cap U^\perp = \{0\}$. Zu zeigen bleibt die Eindeutigkeit von $U^\perp$ ( Aufgabe ).
**Beachte:** Direkte Komplemente linearer Teilräume sind **nicht** eindeutig!!

(xi) Es seien $f|_U$ nichtausgeartet und $U < V,\ M \subset V$. Dann gelten die Beziehungen $\operatorname{Dim} U + \operatorname{Dim} U^\perp = \operatorname{Dim} V,\ U = U^{\perp\perp}$ sowie $\langle M \rangle = M^{\perp\perp}$.
**Denn:** Nach (x) und (iv) gilt $\operatorname{Dim} U + \operatorname{Dim} U^\perp = \operatorname{Dim} V = \operatorname{Dim} U^\perp + \operatorname{Dim} U^{\perp\perp}$ und somit $\operatorname{Dim} U = \operatorname{Dim} U^{\perp\perp}$, also wegen (iii) $U = U^{\perp\perp}$. Mithin gilt auch $\langle M \rangle = M^{\perp\perp}$.

(xii) Für $x \in V = U \perp U^\perp$ gilt in Prä-Hilberträumen der
**Satz des Pythagoras**: $\|x\|^2 = \|x_U\|^2 + \|x_{U^\perp}\|^2$.
**Denn:** Es gilt
$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle x_U + x_{U^\perp}, x_U + x_{U^\perp} \rangle = \langle x_U, x_U \rangle + \langle x_{U^\perp}, x_{U^\perp} \rangle =$
$\|x_U\|^2 + \|x_{U^\perp}\|^2$ .

**10.7 Definiton :** Sei $U$ linearer Teilraum eines normierten Vektorraumes $V$ und es sei $x \in V$. $u \in U$ mit $\|x - u\| = \inf_{y \in U} \|x - y\|$ heißt ein **Proximum** von $x$ in $U$.

**10.8 Satz (Approximation in Prä-Hilberträumen) :** Sei $V$ endlichdimensionaler Prä-Hilbertraum, und sei $U < V$ sowie $x \in V$. Dann existiert genau ein Proximum von $x$ in $U$, nämlich $\pi_U x$.
**Beweis:** Existenz eines Proximums: Seien $x \in V$, $y \in U$. Dann gilt nach 10.6(viii),(xii) $\|x - y\|^2 = \|\pi_U x + x_{U^\perp} - y\|^2 = \|\pi_U x - y\|^2 + \|x_{U^\perp}\|^2 = \|\pi_U x - y\|^2 + \|x - \pi_U x\|^2 \geq \|x - \pi_U x\|^2$. Also ist $\pi_U x$ ein Proximum von $x$ in $U$.
Eindeutigkeit des Proximums: Für $y \in U$ mit $y \neq \pi_U x$ gilt $\pi_U x - y \neq 0$, also $\|\pi_U x - y\|^2 > 0$, also wegen der obigen Ungleichung $\|x - y\|^2 > \|x - \pi_U x\|^2$. $\square$.

Im Falle der Standardbilinearform firmiert dies auch unter der Bezeichnung **Methode der kleinsten Quadrate**, da $\sum \|\xi_j - \eta_j\|^2 = \|x - y\|^2$ minimiert wird. Diese Methode wurde von Gauß schon in jungen Jahren entwickelt, und brachte dem 23-Jährigen Weltruhm, als er aufgrund von Beobachtungsdaten des neuentdeckten Planetoiden Ceres, die sein Entdecker Guiseppe Piazzi zu Beginn des Jahres 1801 einen Monat lang gesammelt hatte, die genaue Bahn der Ceres berechnete. Das ermöglichte nämlich den Astronomen Zach und Olbers, den Kleinplaneten, den man inzwischen verloren hatte und den man vergeblich wiederaufzufinden gesucht hatte, genau ein Jahr nach seiner Entdeckung, in der Sylvesternacht 1801, an der Stelle zu beobachten, die Gauß vorhergesagt hatte.

***C. F. Gauß***
***(1777 - 1855)***

**10.9 Satz :** In Prä-Hilberträumen gilt: Für jedes $b \in \mathbb{K}^m$ hat $Ax = \pi_{\mathbb{K}A^{(1)}+\ldots+\mathbb{K}A^{(n)}} b$ genau eine Lösung $x_0$ kleinster Norm.
Notwendig und hinreichend für solche Lösung sind

(i) $Ax_0 = \pi_{\mathbb{K}A^{(1)}+\ldots+\mathbb{K}A^{(n)}} x_0$ und

(ii) $x_0 \in \mathbb{K}A_{(1)} + \ldots + \mathbb{K}A_{(n)}$.

**10.10 Definitionen :** Eine Lösung von $Ax = \pi_{KA^{(1)}+\ldots+KA^{(n)}}b$ heißt eine **approximative Lösung** von $Ax = b$. Sei $A^- : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ diejenige Abbildung, die $y$ jeweils auf die kürzeste approximative Lösung von $Ax = y$ (entsprechend 9.9) abbildet. $A^-$ heißt **Pseudoinverse** zu $A$.