Kapitel 11

Eigenwerte, Normalformen von Matrizen

Bei linearen Transformationen interessieren oft diejenigen Vektoren, die unter der Abbildung ihre Richtung nicht ändern oder allenfalls die entgegengesetzte Richtung annehmen, also 0 und die sogenannten Eigenvektoren:

11.1 Definitionen : Sei $l \in \mathrm{Hom}_K(V,V) =: \mathrm{End}_K V$. $\lambda \in K$ heißt ein **Eigenwert** von l, wenn $x \in V \setminus \{0\}$ so existiert, daß $l(x) = \lambda x$ gilt. x heißt dann ein **Eigenvektor** von l. $E(l;\lambda) := \{x \in V : l(x) = \lambda x\}$ heißt der **Eigenraum** von l zum Eigenwert λ.

11.2 Bemerkungen :

(i) Wenn λ ein Eigenwert von l ist, so ist $l - \lambda\,\mathrm{id} \in \mathrm{End}_K V$ und $\mathrm{E}(l;\lambda) = \mathrm{Kern}(l - \lambda\,\mathrm{id})$.

(ii) Wenn $\mathrm{Dim}\, V < \infty$ ist, so gilt: λ Eigenwert von $l \longleftrightarrow \mathrm{Det}(l - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$.
Denn: Seien A, B Basen von V. Dann gilt $\mathrm{Det}\, M_{B,B}(l) = \mathrm{Det}(T M_{A,A}(l) T^{-1}) = (\mathrm{Det}\, T)^{-1}\,\mathrm{Det}\, M_{A,A}(l)\,\mathrm{Det}\, T = \mathrm{Det}\, M_{A,A}(l)$. Also macht es Sinn, von der Determinante einer linearen Transformation zu sprechen.

Nun hat l genau dann einen Eigenvektor (mit Eigenwert λ), wenn $(M_{B,B}(l) - \lambda E)x = 0$ nichttrivial lösbar ist, d.h. genau dann, wenn $\mathrm{Det}(l - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$ ist.

(iii) Beispiel einer Drehung um den Ursprung von $\mathbb{R}^2$ mit Drehwinkel α:
$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Ermittlung der Eigenwerte:
$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha + 1 = 0$, also $\lambda = e^{\pm i\alpha}$.

Also sind mit Ausnahme von $\alpha = 0$ oder π keine reellen Eigenwerte vorhanden. Das deckt sich natürlich auch mit der geometrischen Anschauung. In den beiden Ausnahmefällen ist jeder Vektor von $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor.

11.3 Definitionen : Es sei $\mathrm{Dim}_K V = n < \infty$.
$f_l(\lambda) := \mathrm{Det}(l - \lambda\,\mathrm{id}) = (-1)^n\lambda^n + \sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\beta_{n-j}\lambda^{n-j} \in K[\lambda]$ heißt das **charakteristische Polynom** von l. β_{n-1} heißt die **Spur** von l. Entsprechend werden diese Begriffe für Matrizen gebraucht. Wenn $R, S, T \in M_{n,n}(K)$ mit $R = TST^{-1}$ gilt, so heißt R ein **Konjugiertes** von S oder zu S **ähnlich**, geschrieben $R \sim S$.

11.4 Bemerkungen :

(i) Wenn A, B Basen des endlich-dimensionalen Vektorraumes V sind, so gilt $M_{A,A}(l) \sim M_{B,B}(l)$ (Satz 6.14).

(ii) Wenn $M = (\alpha_{ij}), M^* = (\alpha^*_{ij})$ und $M \sim M^*$ gilt, so gilt Spur M = Spur $M^* = \sum \alpha_{ij} = \sum \alpha^*_{ij}$.

(iii) Eigenwerte eines linearen Endomorphismus endlicher Dimension sind genau die Nullstellen seines charakteristischen Polynoms (vgl. 11.2 (ii)).

(iv) Wenn $l \in \mathrm{End}_K V$ und $\mathrm{Dim}_K V = n$ gilt, so hat l höchstens n verschiedene Eigenwerte.
Denn: Der Grad von $f_l(x)$ ist n. Die Aussage folgt nun aus 11.5 (ii).

11.5 Satz : Für jedes $f(x) \in K[x]$ gelten folgende Aussagen:

(i) $f(\lambda) = 0 \longleftrightarrow \exists g(x) \in K[x] : f(x) = (x - \lambda)g(x)$,

(ii) Grad $f = n \longrightarrow f$ hat höchstens n Nullstellen (Vielfachheiten mitgerechnet!)
Beweis: Da $K[x]$ ein euklidischer Ring ist, gilt der Divisionsalgorithmus $f(x) = (x - \lambda)g(x) + r$ mit $r = 0$ oder $Nr = 0$. Daher ist l genau dann Nullstelle von f, wenn $r = 0$ ist. Also gilt (i) und somit auch (ii).

11.6 Satz (Fundamentalsatz der Algebra) : [1] In $\mathbb{C}$ hat jedes Polynom vom Grad $n \quad (n > 0)$ wenigstens eine Nullstelle (und damit genau n

[1] Nach unvollständigen Versuchen durch Newton, d'Alembert , Euler und Lagrange gab C. F. Gauß in seiner Dissertation 1799 an der Universität Helmstedt den ersten richtigen Beweis dieses Theorems. Gauß lieferte später noch drei weitere Beweise dieses Theorems!!

Nullstellen - Vielfachheiten mitgerechnet!).
Beweis: Siehe den funktionentheoretischen Beweis in Teil 3 mit Hilfe des Satzes von Liouville.

11.7 Bemerkungen :

(i) Es sei jeweils $x_j \in E(l;\lambda_j)$ für $j = 1,\dots,m$ und paarweise verschiedene $\lambda_1,\dots,\lambda_m$. Dann sind $x_1,\dots,x_m$ linear unabhängig.
Denn: Sei $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0$. Wir zeigen durch vollständige Induktion, daß dann $\mu_i = 0 \quad \forall i = 1,\dots,m$ gilt: Es ist $0 = l(0) = l(\sum_{i=1}^m \mu_i x_i) = \sum_{i=1}^m \mu_i \lambda_i x_i$ und andererseits $0 = \lambda_m 0 = \sum_{i=1}^m \mu_i \lambda_m x_i$, also $0 = \sum_{i=1}^{m-1} \mu_i(\lambda_i - \lambda_m)x_i$. Nach Induktionsannahme gilt also $\mu_i(\lambda_i - \lambda_m) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,m-1$ und mithin $\mu_i = 0 \quad \forall i = 1,\dots,m$.

(ii) Es sei $l \in \mathrm{End}_K V$ und $\mathcal{S} := \{\lambda_1,\dots,\lambda_m\}$ die Menge aller (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von l, das sogenannte **Spektrum** von l. Dann gilt $\sum\limits_{j=1}^{m} E(l;\lambda_j) = \bigoplus\limits_{j=1}^{m} E(l;\lambda_j)$.
Denn: Nach (i) ist jedes r-tupel $x_1,\dots,x_r$ mit $x_i \in E(l;\lambda_i)\setminus 0$ linear unabhängig, also gilt $E(l;\lambda_i) \cap \sum_{\kappa\neq i} E(l;\lambda_\kappa) = 0$, und somit gilt nach 10.3 die Behauptung.

11.8 Definitionen : Eine Matrix $M = (\alpha_{ij}) \in M_{n,n}(K)$ heißt **Diagonalmatrix** , wenn $\alpha_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt, geschrieben auch als $M = \mathrm{Diag}[\alpha_{11},\dots,\alpha_{nn}]$. M heißt **untere Dreiecksmatrix**, wenn $\alpha_{ij} = 0$ für alle $i < j$ ist. Analog: **obere Dreiecksmatrix** . $l \in \mathrm{End}_K V$ heißt **diagonalisierbar** , wenn V eine Basis B besitzt, so daß $M_{B,B}(l)$ eine Diagonalmatrix ist. Analog: **trigonalisierbar** .

11.9 Bemerkungen : Sei durchgehend $l \in \mathrm{End}_K V$, $\mathrm{Dim}_K V = n < \infty$.

(i) l ist genau dann diagonalisierbar, wenn es eine Basis B aus Eigenvektoren von l gibt. In diesem Fall gilt: $M_B(l) = \mathrm{Diag}[\lambda_1,\dots,\lambda_n]$ mit $\lambda_j \in \mathcal{S} \quad \forall j = 1,\dots,n$.

(ii) l ist diagonalisierbar, wenn es n paarweise verschiedene Eigenwerte besitzt.

(iii) l ist genau dann diagonalisierbar, wenn $V = \bigoplus\limits_{\lambda\in\mathcal{S}} E(l;\lambda)$ gilt.

(iv) Es sei $V = U_1 \oplus U_2$ mit $lU_1 \subset U_1$ und einer Basis $B = \{b_1,\dots,b_r,\dots,b_n\}$ von V so, daß $b_1,\dots,b_r \in U_1$ und $b_{r+1},\dots,b_n \in U_2$ sind. Dann ist

$M_B(l) = \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$. Wenn überdies $lU_2 \subset U_2$ gilt, so ist sogar $M_B(l) = \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$.

(v) Ein Beispiel dafür, daß $f_l(\lambda)$ in $K[\lambda]$ nicht immer vollständig zerfällt. Es kann aber auch sein, daß $f_l(\lambda)$ über $K[\lambda]$ in Linearfaktoren zerfällt und l dennoch nicht diagonalisierbar ist, weil die Eigenräume „zu klein“sind. Werden statt ihrer die sogenannten **iterierten Kerne** $\mathrm{Kern}(l - \lambda\,\mathrm{id})^\nu$ genommen, so läßt sich beweisen:

11.10 Satz (Jordansche Normalform) : Sei $l \in \mathrm{End}_K V$, und es zerfalle $f_l(\lambda)$ über K vollständig. Dann existiert eine Basis B von V derart, daß $M_B(l) = \mathrm{Diag}[J_1, \ldots, J_r]$ ist, wobei die J_i sogenannte **Jordanblöcke** vom Typ $J_i = \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \cdot & & \\ & \cdot & \cdot & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ sind (λ Eigenwert von l). Jeder Eigenwert von l tritt in wenigstens einem Block auf. Die Blöcke können auch die triviale Form $J_i = [\lambda]$ haben. Die Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Blöcke eindeutig.

11.11 Definitionen : Sei f eine Sesquilinearform auf V. $l \in \mathrm{End}_K V$ heißt ein **metrischer Endomorphismus** , wenn $f \circ l = f$ ist. Ist überdies $l \in \mathrm{GL}(n, K)$, so heißt l eine **Isometrie**.

Wenn f symmetrische Bilinearform ist, so heißen die Isometrien **orthogonale** Abbildungen.

Wenn f hermitesch ist, so heißen die Isometrien **unitäre** Abbildungen.

Wenn f alternierend ist, so heißen die Isometrien **symplektische** Abbildungen.

Entsprechend bildet die Menge der Isometrien die **orthogonale Gruppe** $O_n(V, f)$ bzw. die **unitäre Gruppe** $U_n(V, f)$ bzw. die **symplektische Gruppe**?indexsymplektische Gruppe $Sp_n(V, f)$.

Die Isometriegruppen bezüglich der Standardformen (hermitesch in $\mathbb{C}^n$, bilinear in $\mathbb{R}^n$) werden einfach mit U_n oder $U(n)$ bzw. O_n oder $O(n)$ bezeichnet.

$SO(n) := \{A \in O(n) : \mathrm{Det}\, A = 1\}$ bzw. $SU(n)$ heißen die **spezielle orthogonale** bzw. **spezielle unitäre Gruppe**. $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ (bzw. $M_{n,n}(\mathbb{R})$) heißt eine **unitäre** (bzw. **orthogonale**) Matrix, wenn $\overline{A}^t A = E$
(bzw. $A^t A = E$) gilt.

11.12 Bemerkungen :

(i) $O(n) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) : A^t A = E\}, U(n) = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{C}) : \overline{A}^t A = E\}$

(ii) $A \in O(n) \longrightarrow \operatorname{Det} A = \pm 1$

(iii) $A \in SO(3) \longrightarrow A$ bewirkt eine Drehung um eine feste Achse durch $(0,0,0)$.

(iv) $A \in O(2) \longrightarrow A$ bewirkt eine Drehung um $(0,0)$ oder eine Drehspiegelung, je nachdem, ob $\operatorname{Det} A = 1$ oder $\operatorname{Det} A = -1$ ist.

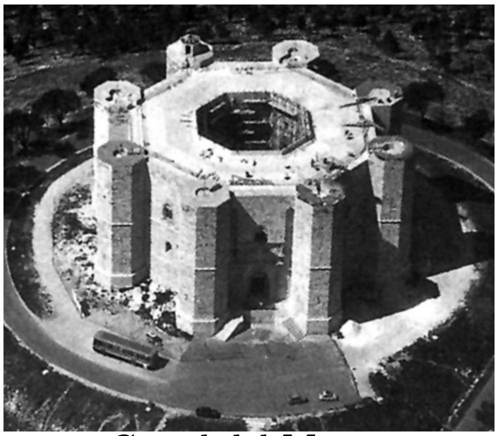
11.13 Satz : Es sei G eine endliche Untergruppe von $SO(3)$. Dann ist G isomorph zu einer der folgenden Gruppen:
C_n, das ist eine **zyklische Gruppe** der Ordnung n ,
D_n, das ist eine **Diedergruppe** der Ordnung n ,
T, der **Tetraedergruppe**, d. i. die Drehgruppe eines regulären Tetraeders ,
$O \simeq S_4$, der **Oktaedergruppe**, Drehgruppe eines regulären Oktaeders ,
$I \simeq A_5$, der **Ikosaedergruppe**, Drehgruppe eines regulären Ikosaeders .[2] [3] [4]

---

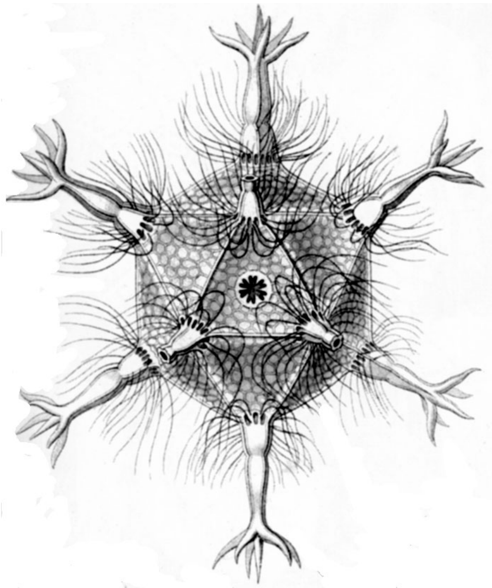
[2]Dieses Resultat hat natürlich für Symmetriebetrachtungen im E^3 große Bedeutung. So ist es nicht verwunderlich, daß der Satz 1885 von dem Physiker Pierre Curie (Gatte von Madame Curie) bewiesen wurde (Sur les repetitions et la symmetrie. Comptes rendues <u>100</u>, 1393-1396). In der klassischen Kristallographie kommt die Ikosaedergruppe nicht vor, da 5-zählige Symmetrie ausgeschlossen ist. Jedoch ist das in der Welt des Lebendigen als auch bei den Quasikristallen der Fall.

[3]Beachte, daß Oktaeder- und Hexaedergruppe (Würfelgruppe) zueinander isomorph sind, ebenso Ikosaeder- und Dodekaedergruppe !

[4]Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder sind die sogenannten Platonischen Körper. Plato (427 - 347 v.u.Z.) läßt in seinem Dialog ‘Timaios ‘ den Pythagoreer gleichen Namens die Lehre vortragen, wie den regulären Polyedern die Elemente Feuer, Wasser, Erde, Luft (des Empedokles) zugeordnet werden können, und legt zum ersten Mal eine konsequent mathematisierte Kosmologie vor. Die Klassifikation der 5 regulären Polyeder erfolgte in der Platonischen Akademie durch Theaetet so, wie im Buch XIII des Euklid erhalten. Die Polyeder tragen daher Platons Namen.



Castel del Monte



Radiolarie

[5] [6]

11.14 Lemma : Es seien V, V' endlich-dimensionale (Prä-)Hilberträume über $\mathbb{K}$, und sei $l \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, V')$. Dann gilt:

(i) l ist genau dann unitär (bzw. orthogonal), wenn es jede ON-Basis von V in eine ON-Basis von V' überführt.

(ii) l ist genau dann ein unitärer (bzw. orthogonaler) Automorphismus,

[5] Jagdschloß des letzten Stauferkaisers Friedrich II in Apulien mit D_8-Symmetriegruppe. Baubeginn 1240.

[6] Von Ernst Haeckel entdeckte Art Circogonia icosahedra . Schon während seines Studiums in Würzburg entwickelte sich bei Haeckel, angeregt durch eine Vorlesung 'Vergleichende Anatomie 'von Albert v. Koelliker 1853, das Interesse an Meeresbiologie im mikroskopischen Bereich, das durch Johannes Peter Müller in Berlin verstärkt wurde. Auf Expeditionen in Italien, insbesondere in Messina 1859, entdeckte Haeckel zu den etwa 50 Einzellern, die J. Müller beschrieben und unter dem Namen 'Radiolarien'zusammengefaßt hatte, weitere 120 neue Radiolarienarten. Die Ergenisse wurden von ihm in der Monographie 'Die Radiolarien. Berlin 1862' publiziert. 1872 bis 1876 sammelte die britische Tiefsee-Expedition 'Challenger 'an 354 Stellen der Weltmeere Proben des Grundschlammes (Radiolarienschlamm). Haeckel wurde die Auswertung der Radiolarienfunde übertragen. Die Ergebnisse wurden sowohl separat publiziert als auch als zweiter Teil der Radiolarienmonographie (Berlin 1887 , 340 erstmalig beschriebene Arten). Ernst Haeckel wurde über seine Disziplin hinaus bekannt durch seinen Kampf für Darwins Evolutionstheorie gegen den mainstream im reaktionären Deutschland sowie durch seine monistische Philosophie (Populärdarstellung: 'Die Welträtsel').

wenn $M_B(l)$ bezüglich jeder ON-Basis B eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix ist.

11.15 Satz : Es sei V ein endlich-dimensionaler komplexer (Prä-)Hilbertraum, und l sei ein unitärer Endomorphismus von V. Dann existiert eine ON-Basis aus Eigenvektoren von l und V ist orthogonale Summe der Eigenräume von l.

Genauer: Zu $A \in U_n(\mathbf{C}, f)$ existiert $T \in U_n(\mathbf{C}, f)$ mit $T^{-1}AT = \overline{T}^t AT = \mathrm{Diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$, wobei $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subset$ Spektrum l und $|\lambda_j| = 1\ \forall j = 1, \ldots, n$ gilt.

11.16 Satz : Zu $A \in O_n(\mathbb{R}, f)$ existiert $T \in O_n(\mathbb{R}, f)$ mit $T^{-1}AT = \mathrm{Diag}[R_1, \ldots, R_r, 1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1]$, wobei die R_j 2×2-Blöcke vom Typ $\begin{bmatrix} \cos\phi_j & -\sin\phi_j \\ \sin\phi_j & \cos\phi_j \end{bmatrix}$ sind.

11.17 Definitionen : Ein Endomorphismus l eines Prä-Hilbertraumes heißt **selbstadjungiert**, wenn $\langle lx, y\rangle = \langle x, ly\rangle \quad \forall x, y \in V$ gilt.

11.18 Bemerkungen :

(i) Sei B eine ON-Basis des Prä-Hilbertraumes V. Dann ist ein Endomorphismus l genau dann selbstadjungiert, wenn $M_B(l)$ symmetrisch bzw. hermitesch ist.

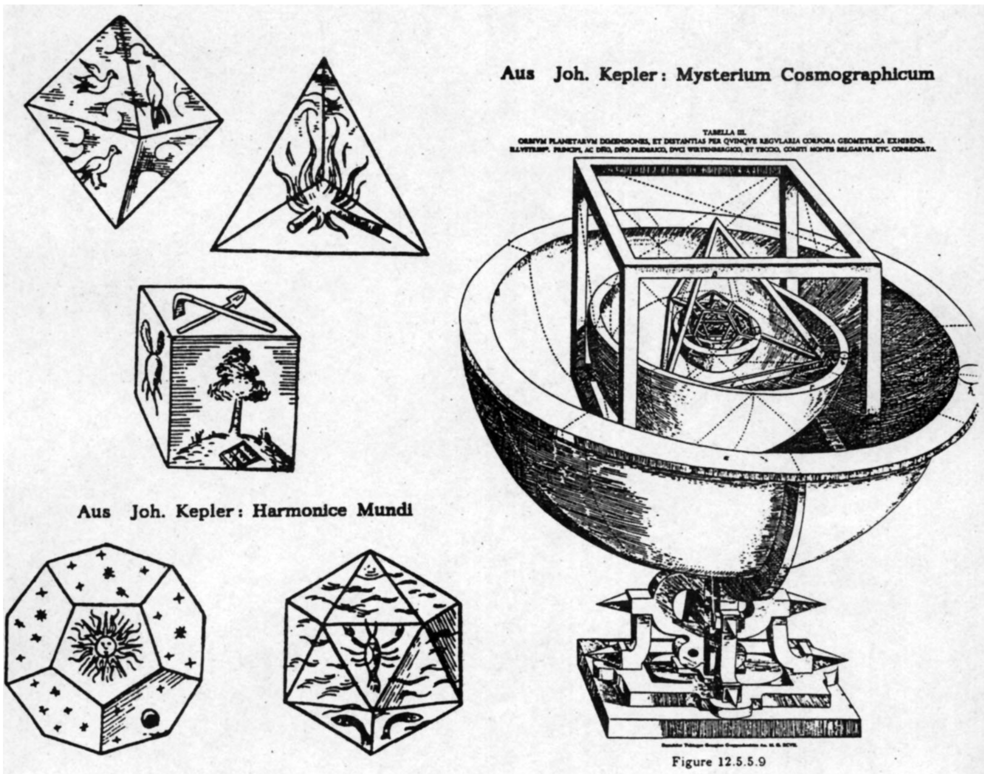
(ii) Wenn $A \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ hermitesch ist, so sind die Eigenwerte von A reell.

11.19 Satz : Die folgenden Aussagen (i), (ii), (iii) gelten und sind verschiedene Formulierungen des gleichen Sachverhalts (sind also logisch äquivalent):

(i) **Spektrums-Satz:** Sei V ein endlich-dimensionaler (Prä-)Hilbertraum und l ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Dann sind die Eigenwerte von l reell, und es existiert eine ON-Basis aus Eigenvektoren von l.

(ii) **Diagonalisierung symmetrischer oder hermitescher Matrizen:** Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ reell symmetrisch oder komplex hermitesch. Dann ist $\mathcal{S}_A \subset \mathbb{R}$, und es existiert eine orthogonale bzw. unitäre Matrix T so, daß $T^{-1}AT = \mathrm{Diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$ mit $\lambda_i \in \mathcal{S} \quad \forall i$ gilt.

(iii) **Hauptachsentransformation:** Seien $q(x) = \sum\limits_{i,j}^{1 \ldots n} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j$ bzw. $q(x) = \sum\limits_{i,j}^{1 \ldots n} \alpha_{ij}\overline{\xi_i}\xi_j$ eine reelle **quadratische Form** bzw. eine komplexe **hermitesche Form** mit symmetrischer bzw. hermitescher Koeffizientenmatrix. Dann gibt es eine Koordinatentransformation $x = Tx'$ mit $T \in O$ bzw. $T \in U$ derart, daß sich q auf Diagonalgestalt $\sum \lambda_i \xi_i^2$ bzw. $\sum \lambda_i \xi_i \overline{\xi_i}$ transformiert. Dabei sind die λ_i reell und sind die Eigenwerte von $A = (\alpha_{ij})$.



[7]

[7]Im Spätwerk 'Harmonices Mundi' von 1619 zeigt sich das ganze Genie des Johannes Kepler (1571 - 1630) - eine Synthese von tiefgründigem, philosophischem Denken in der Tradition der Pythagoreer, des Plato und der Neuplatoniker mit sachlicher, unvoreingenommener mathematisch-physikalischer Betrachtungsweise: Im 3. Kapitel des 5. Buches formuliert er das berühmte Gesetz über die Umlaufzeiten der Planeten unseres Sonnensystems, das nun drittes Keplersches Gesetz heißt. Im 2. Buch referiert er die platonische Kosmologie des Timaios: ‚Das sind jene 5 Körper, die die Pythagoreer, Plato und Proklus, der Kommentator des Euklid, die Weltfiguren zu nennen pflegen . . . Wenn jedoch auch die Analogie im allgemeinen plausibel ist, so ist sie doch in dieser speziellen Form keineswegs

notwendig bedingt und läßt andere Auffassungen zu . . . Nun ist es eine wesentliche Eigenschaft jener 5 Figuren, daß sie mit ihren Ecken in eine Kugelfläche umbeschrieben und mit den Mittelpunkten ihrer Seitenflächen um ein solche umbeschrieben werden können . . . Was konnte daher plausibler erscheinen, als daß der Schöpfer die 5 Abstände zwischen jenen 6 himmlischen Sphären den 5 Figuren entnommen hat, und zwar in der Reihenfolge, daß zwischen den Spären von Saturn und Jupiter der Würfel zu denken, zwischen Jupiter und Mars das Tetraeder, zwischen Mars und Erde das Dodekaeder, zwischen Erde und Venus das Ikosaeder und zwischen Venus und Merkur das Oktaeder! '
Kepler nimmt damit einen Gedanken wieder auf, den er bereits 23 Jahre zuvor im 'Mysterium Cosmographicum' geäußert hatte.
Die Pythagoreer, Platon und Kepler hatten also ein feines Gespür für die Tatsache, daß die regulären Polyeder Grundstrukturen unserer Welt repräsentieren, was seit den v.Laueschen Beugungsversuchen mit Röntgenstrahlen an Festkörpern klar ist.
Die Abbildungen sind jeweils der Holzschnitt der Originalausgabe von 1619 bzw. ein Kupferstich von 1597.