Kapitel 18

Maß- und Integrationstheorie

Fouriers Glaube, dass in einem endlichen Intervall jede (beschränkte) Funktion sich als trigonometrische Reihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu\omega x + b_\nu \sin \nu\omega x$ darstellen lässt, führte ihn ja bekanntlich dazu, durch Multiplikation der Gleichung mit $\cos \lambda\omega x$ bzw. $\sin \lambda\omega x$ und anschließende Integration über das (Perioden-)Intervall die Formeln für die Fourierkoeffizienten zu gewinnen. Dabei benutzte er stillschweigend, dass (1) das Integral $\int_0^P f(x) \cos \lambda\omega x dx$ überhaupt existiert und (2) für die in Frage stehende Reihe Integration und Summation vertauscht werden dürfen. Das führte im 19. Jahrhundert zu einer Klärung des Funktionsbegriffes, zur Einführung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz und schließlich durch Lebesgue zur Schaffung eines allgemeinen Integrals, dessen Nützlichkeit Lebesgue auch gleich an Hand der Fourier-Problematik demonstrierte.[1]

18.1 Definitionen : $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ heißt **erweiterter reeller Zahlbereich**.

Es gelte: $\pm\infty + (\pm\infty) = \xi + (\pm\infty) = \pm\infty + \xi = \pm\infty \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$;
$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$;
$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$;

$$\xi \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot \xi = \begin{cases} \pm\infty & \text{für } \xi > 0 \\ \mp\infty & \text{für } \xi < \infty \\ 0 & \text{für } \xi = 0 \end{cases} .$$

$\infty - \infty$ und $\frac{\infty}{\infty}$ werden nicht definiert!
$\limsup a_\nu := \inf_\mu (\sup_{\nu \geq \mu} a_\nu)$ heißt **limes superior** der a_ν.

[1] "Un théoreme sur les séries trigonométriques", Comptes Rendues Ac. Sci. Paris, 137(1902), 585.

Sei Ω eine Menge. Eine Abbildung $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt eine **numerische Funktion**.

Eine Familie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt **σ-Algebra auf** Ω , wenn

(i) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $M \in \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}M = \Omega \setminus M \in \mathcal{A}$ und

(iii) (M_ν) Folge aus $\mathcal{A} \longrightarrow \bigcup_\nu M_\nu \in \mathcal{A}$ gelten.

Ein geordnetes Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ – Ω Menge, $\mathcal{A}$ σ-Algebra auf Ω – heißt ein **messbarer Raum** oder **Messraum**. Jedes Element aus $\mathcal{A}$ heißt **$\mathcal{A}$-messbar** (wenn klar ist, was $\mathcal{A}$ ist, so auch schlicht **messbar**). In der Wahrscheinlichkeitstheorie nennen wir die messbaren Mengen **Ereignisse** , und die entsprechenden σ-Algebren heißen **Ereignisalgebren** .

18.2 Bemerkungen :

(i) Jede nichtleere Teilmenge von $\overline{\mathbb{R}}$ hat genau ein Infimum und genau ein Supremum.
Denn: Für beschränkte Teilmengen ist das klar nach 3.1 - 3.3. Wenn M nach oben nicht beschränkt ist, so setze $\sup M = \infty$.

(ii) Wenn (M_ν) eine Folge aus $\mathcal{A}$ ist, so gilt $\bigcap_\nu M_\nu \in \mathcal{A}$.

Denn: Mit $\mathcal{C}M_\nu =: M_\nu'$ ist $(\mathcal{C}M_\nu)$ eine Folge aus $\mathcal{A}$ (18.1 (ii)), also gilt nach (iii) $\bigcup_\nu M_\nu' \in \mathcal{A}$, und somit nach (ii) $\mathcal{C}(\bigcup_\nu M_\nu') \in \mathcal{A}$. Nun ist aber $\mathcal{C}(\bigcup M_\nu') = \bigcap \mathcal{C}M_\nu' = \bigcap \mathcal{C}\mathcal{C}M_\nu = \bigcap_\nu M_\nu$.

(iii) Beispiele für σ-Algebren auf Ω:

(a) $\mathcal{A} = \mathcal{P}\Omega$ (Potenzmenge von Ω).

(b) $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$.

(c) Mit $\emptyset \neq M \subsetneq \Omega$ sei $\mathcal{A}$ als $\{\emptyset, M, \mathcal{C}M, \Omega\}$ gewählt.

(iv) Wenn $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ eine Menge von σ-Algebren auf Ω ist, so ist $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine σ-Algebra auf Ω. (klar)

(v) $M, N \in \mathcal{A} \longrightarrow M \setminus N \qquad (= M \cap \mathcal{C}_\Omega N) \in \mathcal{A}$.

(vi) Wenn $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}\Omega$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ gilt, so existiert eine kleinste, $\mathcal{M}$ umfassende σ-Algebra $\langle\mathcal{M}\rangle$ auf Ω, nämlich der Durchschnitt aller $\mathcal{M}$ umfassenden σ-Algebren. (Analogie zu 4.3 !)

18.3 Definitionen : $\langle\mathcal{M}\rangle$ heißt die **von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra** auf Ω, $\mathcal{M}$ heißt ein Erzeugendensystem für $\langle\mathcal{M}\rangle$.

Émile Borel (1871 - 1956)

Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$. Die von den offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra heißt **Borel-Algebra $\mathcal{B}^n$**. Die Elemente von $\mathcal{B}^n$ heißen die **Borel-Mengen**. Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ und $(\Omega', \mathcal{A}')$ Messräume. Eine Abbildung $f : \Omega \to \Omega'$ heißt **$(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar** , wenn $\bigwedge_{A' \in \mathcal{A}'} f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$. Sind speziell $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}^n$, $\Omega' = \mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}^m$, so heißt f auch **Borel-messbar**.

18.4 Bemerkungen :

(i) Messbare Abbildungen sind die „Morphismen" der σ-Algebren. (Analogon zur Eigenschaft von Satz 5.8)

> **Slogan** für messbare Abbildungen: Die Urbilder messbarer Mengen sind messbar.

(ii) Messbare Abbildungen von Wahrscheinlichkeitsräumen heißen in der Wahrscheinlichkeitstheorie **Zufallsvariable** . (Siehe Kapitel ...)

(iii) Konstante Abbildungen $f \equiv$ const. sind messbar.
Denn: Es gilt doch $f^{-1}(\text{const.}) = \Omega \in \mathcal{A}$.

(iv) Seien $(\Omega, \mathcal{A})$, $(\Omega', \mathcal{A}')$ Messräume mit $\mathcal{A}' = \langle\mathcal{M}'\rangle$. Dann gilt: $f : \Omega \to \Omega'$ ist genau dann $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar, wenn $\bigwedge_{M' \in \mathcal{M}'} f^{-1}(M') \in \mathcal{A}$ (*) gilt.

Denn: $\mathcal{Q}' := \{Q' \in \mathcal{P}\Omega' : f^{-1}(Q') \in \mathcal{A}\}$ ist eine σ-Algebra auf Ω'.Der Rest des Beweises folgt aus dem folgenden Diagramm von logischen Äquivalenzen:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}' \subset \mathcal{Q}' & \longleftrightarrow & \mathcal{M}' \subset \mathcal{Q}' \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ f \text{ ist } (\mathcal{A} - \mathcal{A}')\text{-messbar} & & (*) \end{array}$$

(v) Wenn $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig ist, so ist f $(\mathcal{B}^n - \mathcal{B}^m)$-messbar, oder, wie man auch sagt, **Borel-messbar**.
(klar nach (iii))

(vi) $\mathcal{B}$ lässt sich als σ-Algebra von allen Intervallen $]\alpha,\infty[$ erzeugen.
Denn: Sei $\alpha < \beta$. Dann gilt $]\alpha,\infty[\setminus]\beta,\infty[=]\alpha,\beta]$. Also erzeugen die in der Behauptung angegebenen Intervalle alle links halboffenen.

Sei $\alpha < \gamma$. Dann existiert eine Folge (β_n) mit $\alpha < \beta_n < \gamma$, die gegen γ konvergiert. Also gilt $\bigcup_n]\alpha,\beta_n] =]\alpha,\gamma[$, und somit erzeugen die Intervalle $]\alpha,\infty[$ alle offenen Intervalle. Also liegt $\mathcal{B}$ im Erzeugnis aller $]\alpha,\infty[$. Umgekehrt ist klar, dass dieses Erzeugnis in $\mathcal{B}$ liegt.

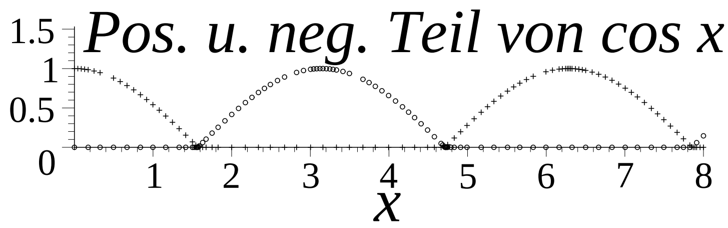
(vii) f ist genau dann $(\mathcal{A} - \mathcal{B})$-messbar, kurz: **$\mathcal{A}$-messbar**, wenn $\bigwedge_{\alpha\in\mathbb{R}} f^{-1}(]\alpha,\infty[) \in \mathcal{A}$ gilt (bzw. $\bigwedge_{\alpha\in\mathbb{R}} f^{-1}(]-\infty,\alpha[) \in \mathcal{A}$).
Denn: Das ist klar nach (iv) und (vi).

(viii) Sei $M \in \mathcal{A}$. Dann ist die **charakteristische Funktion** oder **Indikatorfunktion** $1_M(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in M \\ 0 & \text{für } \omega \notin M \end{cases}$ $\mathcal{A}$-messbar.
Denn: Fall $0 \le \alpha < 1$:$\{\omega \in \Omega : 1_M(\omega) > \alpha\} = 1_M^{-1}(]\alpha,\infty[) = M \in \mathcal{A}$
Fall $\alpha < 0$: $\{\omega \in \Omega : 1_M(\omega) > \alpha\} = \Omega \in \mathcal{A}$
Fall $\alpha \ge 1$: $\{\omega \in \Omega : 1_M(\omega) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{A}$ □

(ix) f, g $\mathcal{A}$-messbar, $\gamma \in \mathbb{R} \longrightarrow \gamma f,\ f+g,\ f\cdot g,\ |f|$ $\mathcal{A}$-messbar.
Beweis: Aufgabe.

18.5 Definitionen : Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Der **positive Teil** f^+ von f ist definiert durch $f^+(x) := \sup\{f(x), 0\}$, entsprechend der **negative Teil** f^- durch $f^-(x) := \sup\{-f(x), 0\}$.

$\mathcal{F}(\Omega,\mathcal{A})$ sei die Menge aller numerischen, $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen, $\mathcal{F}^+(\Omega,\mathcal{A})$ sei die Menge aller numerischen, $\mathcal{A}$-messbaren Funktionen mit $f \ge 0$.



18.6 Bemerkungen :

(i) Nach den Definitionen 18.5 gelten:
$f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$, $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$.

(ii) f ist genau dann $\mathcal{A}$-messbar, wenn f^+ und f^- $\mathcal{A}$-messbar sind.
Denn: 18.4 (viii) und 18.6 (i).

(iii) $f \in \mathcal{F} \longrightarrow A := \{\omega \in \Omega : f(\omega) = +\infty\} \in \mathcal{A}$
$\wedge \qquad B := \{\omega \in \Omega : f(\omega) = -\infty\} \in \mathcal{A}$.
Denn: Zum Beispiel ist $\{\omega \in \Omega : f(\omega) = \infty\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \{\omega \in \Omega : f(\omega) > n\} \in \mathcal{A}$ nach Voraussetzung.

(iv) Die Bezeichnungen seien wie unter (iii) gewählt. Dann gilt: $f \in \mathcal{F} \longleftrightarrow$
$A, B \in \mathcal{A} \qquad \wedge \qquad f_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \in A \cup B \\ f(x) & \text{für } x \notin A \cup B \end{cases}$ ist $\mathcal{A}$-messbar.
Denn: $\longrightarrow$: Diese Richtung ist klar, da $f_1(x) = f(x) \cdot 1_{l_\Omega(A \cup B)}$ gilt. Beachte 18.4 (vii), (viii) und 18.6 (ii).
$\longleftarrow$: Es seien $A, B \in \mathcal{A}$, und sei f_1 $\mathcal{A}$-messbar.

(a) Fall $\alpha \geq 0$: $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} = \{x \in \Omega : f_1(x) > \alpha\} \cup A \in \mathcal{A}$,

(b) Fall $\alpha < 0$: $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} = \{x \in \Omega : f_1(x) > \alpha\} \setminus B \in \mathcal{A}$.

(v) $f \in \mathcal{F} \longrightarrow \gamma f, |f|, f^+, f^-, f^2 \in \mathcal{F}$

(vi) Sei (f_ν) eine Folge in $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gehören $f(\omega) := \inf f_\nu(\omega)$, $F(\omega) := \sup f_\nu(\omega)$, $f^* := \liminf f_\nu(\omega) := \sup\limits_{\nu \geq 1}\{\inf\limits_{\mu \geq \nu} f_\mu(\omega)\}$, $F^* := \limsup f_\nu(\omega) := \inf\limits_{\nu \geq 1}\{\sup\limits_{\mu \geq \nu} f_\mu(\omega)\}$ zu $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$.
Beweis: Aufgabe

(vii) Sei (f_ν) eine Folge in $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$, die gegen f konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{F}$.
Denn: $f = \lim f_\nu \underset{\text{Vor.}}{=} \liminf f_\nu \underset{(vi)}{\in} \mathcal{F}$.

(viii) $f \in \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A}) \quad \wedge \quad f \geq 0 \longrightarrow \exists (\varphi_\nu)$ in $\mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$ mit

(a) $f(\omega) = \lim \varphi_\nu(\omega) \qquad \forall \omega$,

(b) $0 \leq \phi_\nu(\omega) \leq \varphi_{\nu+1}(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega, \nu \in \mathbb{N}$,

(c) jedes Folgenglied φ_ν hat nur endlich viele reelle Funktionswerte.

Slogan: Jede nicht negative messbare Funktion lässt sich durch eine monoton wachsende Folge nichtnegativer Elementarfunktionen approximieren.

Beweis: Sei $M_{k\nu} := \begin{cases} \{\omega \in \Omega : \frac{k}{2^\nu} \leq f(\omega) < \frac{k+1}{2^\nu}\} & \text{für } k = 0, 1, \dots, \nu 2^\nu - 1 \\ \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \nu\} & \text{für } k = \nu 2^\nu \end{cases}$.

Die $M_{k\nu}$ sind alle disjunkt. Es gilt $M_{k\nu} \in \mathcal{A}$ (da f $\mathcal{A}$-messbar, also z.B. $\{\omega \in \Omega : f(\omega) < \frac{k+1}{2^\nu}\} \in \mathcal{A}$, aber auch $\{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq \frac{k+1}{2^\nu}\} \in \mathcal{A}$, mithin der Durchschnitt in $\mathcal{A}$ ist, etc.).

Es ist $\{\omega \in \Omega : \phi_\nu(\omega) < \alpha\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) < \frac{k+1}{2^\nu}\}$, wobei $\alpha \in [\frac{k}{2^\nu}, \frac{k+1}{2^\nu}[$ ist, Element von $\mathcal{A}$, da f $\mathcal{A}$-messbar ist . Also $\phi_\nu \in \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$.

Noch einmal: $\phi_\nu(\omega)$ ist die linke Intervallecke, wenn $f(\omega)$ im Intervall liegt. Also gilt natürlich

(a) $f(\omega) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \phi_\nu(\omega)$.

(b) $\phi_\nu(\omega) \geq 0$ ist klar.
Da beim Übergang von ν zu $\nu + 1$ die Unterteilung feiner wird, ist natürlich die linke Intervallecke weiter rechts, d.h. $\phi_\nu(\omega) \leq \phi_{\nu+1}(\omega)$.

(c) gilt nach Definition von ϕ_ν (Es gibt nur die endlich vielen Funktionswerte $0, \frac{1}{2^\nu}, \dots, \frac{\nu 2^\nu - 1}{2^\nu}, \nu$). □

(ix) Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ definiere f als $\mathcal{A}$-messbar, wenn $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ $\mathcal{A}$-messbar sind.

Es lässt sich zeigen: Summe, Produkt und Limes komplexwertiger, $\mathcal{A}$-messbarer Funktionen sind $\mathcal{A}$-messbar.

18.7 Definitionen : Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Eine auf $\mathcal{A}$ definierte numerische Funktion $\mu : \underset{\in \mathcal{A}}{M} \mapsto \underset{\in \overline{\mathbb{R}}}{\mu(M)}$ heißt ein **Maß**, wenn

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(A) \geq 0 \qquad \forall A \in \mathcal{A} \qquad$ und

(iii) μ **abzählbar additiv**,

d.h. $\mu(\dot{\bigcup}_{\nu=1}^{\infty} A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu)$, ist.

∞ kann auf der rechten Seite auftauchen, wenn nämlich ein $\mu(A_\nu) = \infty$ oder die Reihe divergent ist.

Wenn ein Maß μ sogar nach $\mathbb{R}$ abbildet, so heißt das Maß **endlich**. Wenn es eine Folge (A_ν) in $\mathcal{A}$ gibt mit $\bigwedge\limits_\nu \mu(A_\nu) < \infty$ und $\Omega = \bigcup\limits_\nu A_\nu$, so heißt das Maß **$\sigma$-endlich** .

18.8 Bemerkungen :

(i) Es seien $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}\Omega$.

(a) $\mu_1 \equiv 0$ ist ein endliches Maß.

(b) $\mu_2(\emptyset) = 0$, $\mu_2(A) = \infty \quad \forall A \neq \emptyset$ definiert ein Maß, das weder endlich noch σ-endlich ist.

(ii) $\varepsilon_{\omega_0}(A) := 1_A(\omega_0)$ definiert das sogenannte **Dirac-Maß** oder das **bei ω_0 konzentrierte Einheitsmaß** auf $\mathcal{P}\Omega$. Es ist ein endliches Maß. Dieses Maß konzentriert alle Masse auf einen Punkt.

(iii) Sei $g : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $|\Omega| = \aleph_0$ sei. Dann heißt $\mu(A) := \sum\limits_{\omega_i \in A} g(\omega_i)$ ein **abzählbares Maß**, im Spezialfall $g \equiv 1$, d.h. $\mu(A) = |A|$, das **Zählmaß** oder **abzählende Maß**. Das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathcal{P}\mathbb{N})$ ist σ-endlich, aber nicht endlich.

(iv) Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Wenn $\mu(\Omega) = 1$ gilt, so heißt μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** .

(v) Es seien $\Omega = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Es lässt sich zeigen (H. Bauer: W-Theorie und Grundzüge der Maßtheorie (ältere Ausgabe) p. 27): Es existiert genau ein Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $\lambda(]a,b[) = b - a \quad \forall a \leq b$, das sog. **Lebesguesche Maß**. λ ist nicht endlich, aber σ-endlich.

Henri Lebesgue (1875 - 1941)

(vi) Allgemeiner: Zu jeder stetigen, monoton wachsenden Funktion f existiert genau ein Maß λ_f auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit $\lambda_f(]a, b[) = f(b) - f(a)$ für alle $a \leq b$, das sog. **Borel-Stieltjes-Maß** zu f.

Thomas-Jean Stieltjes (1856 - 1894)

(vii) Es seien μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$; $M, N \in \mathcal{A}$.
Dann gilt: $M \subset N \longrightarrow \mu(M) \geq \mu(N)$.
Wenn überdies $\mu(M) < \infty$ ist, so gilt $\mu(N \setminus M) = \mu(N) - \mu(M)$.
Denn: $N = M \,\dot\cup\, (N \setminus M) \longrightarrow \mu(N) = \mu(M) + \mu(N \setminus M) \leq \mu(M)$.
Daraus folgt auch die zweite Behauptung.

(viii) Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann gilt:
Wenn (M_ν) eine bezüglich der Inklusion monoton wachsende Folge in $\mathcal{A}$ ist, so gilt $\mu(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} \mu(M_\nu)$.
Wenn (M_ν) eine bezüglich der Inklusion monoton abnehmende Folge in $\mathcal{A}$ und $\mu(M_1) < \infty$ ist, so gilt $\mu(\bigcap_{\nu=1}^{\infty} M_\nu) = \lim_{\nu \to \infty} \mu(M_\nu)$.
Beweis (der ersten Aussage): Wenn $\mu(M_n) = \infty$ für ein n ist, so gilt die erste Gleichung (beide Seiten sind ∞!).
Also können wir annehmen, dass $\mu(M_\nu) < \infty \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$ gilt. Definiere $A_1 := M_1, \ldots, A_n := M_n \setminus M_{n-1}$ (für $n > 1$). Die A_ν sind paarweise disjunkt (da $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots$). Es ist $M_n = \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} A_j$, also gilt

$$\mu(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu) = \mu \dot{\bigcup_{\nu=1}^{\infty}} A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu) = \lim_{n \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n} \mu(A_\nu) = \lim_{n \to \infty} \mu(M_n).$$

Die zweite Aussage wird analog bewiesen.

18.9 Definitionen : Sei μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt ein **Maßraum**. Wir sagen: Eine Aussage gilt μ**-fast-überall** (μ-f-ü), wenn eine

Menge $M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$ so existiert, dass die Aussage für alle Elemente von $\mathcal{C}_\Omega M$ gilt. Sprechweisen sind z.B. $f(x) = g(x)$ für μ-fast-alle x oder $f = \lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu$ μ-fast-überall.

$f \in \mathcal{F}^+(\Omega, \mathcal{A})$ heißt eine **$\mathcal{A}$-Elementarfunktion** oder **nichtnegative Treppenfunktion**, wenn sie nur endlich viele Funktionswerte $a_1, \ldots, a_n$ besitzt.

Seien $a_1, \ldots, a_n$ paarweise verschieden. $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i}$ ist die **eindeutige Standarddarstellung** von f, wobei $E_i := f^{-1}(a_i)$ gilt. (Die E_i sind die Intervalle der Einteilung, die zur Treppenfunktion gehört.)

Die Menge der Elementarfunktionen sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega, \mathcal{A})$. Wenn f eine Elementarfunktion mit Standarddarstellung $\sum a_i 1_{E_i}$ ist, so definieren wir

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) \qquad .$$

18.10 Bemerkungen :

(i) $f \equiv 0 \longrightarrow \int f d\mu = 0$
Denn: Sogar, wenn $\mu(E_i) = \infty$ ist, gilt die Behauptung, nämlich wegen $0 \cdot \infty = 0$!! Die in 18.1 getätigte Definition ist also zweckmäßig!!

(ii) Das Integral einer Elementarfunktion ist eindeutig bestimmt, da die Standarddarstellung eindeutig bestimmt ist. Es tauchen in $\sum a_i \mu(E_i)$ auch keine Ausdrücke $\infty - \infty$ auf!

(iii) $f \in \mathcal{E}$, $\gamma \geq 0 \longrightarrow \int \gamma f d\mu = \gamma \int f d\mu$
Denn: Für $\gamma = 0$ gilt die Aussage. Wenn $\gamma > 0$ ist, so ist $\gamma f \in \mathcal{F}^+$ und die Standarddarstellung ist entsprechend “ver-γ-facht“!

(iv) $f, g \in \mathcal{E} \longrightarrow \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
Beweis: Seien $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i}$, $g = \sum\limits_{j=1}^{m} a_j 1_{F_j}$ die Standarddarstellungen.

Es ist $f + g = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (a_i + b_j) 1_{E_i \cap F_j}$, aber die rechte Seite muss nicht die Standarddarstellung sein, da für verschiedene Paare (i, j) ein gleicher Wert $a_i + b_j$ herauskommen kann.

Seien $c_1, \ldots, c_r$ die paarweise verschiedenen Werte, die als Summen der a_i und b_j auftreten, und sei $G_k := \bigcup\limits_{a_i + b_j = c_k} E_i \cap F_j$. Es ist $\mu(G_k) =$

$\sum\limits_{a_i+b_j=c_k} \mu(E_i \cap F_j)$. Also ist $f+g=\sum\limits_{k=1}^{r} c_k 1_{G_k}$ die Standarddarstellung von $f+g$.

Mithin gilt $\int(f+g)d\mu = \sum\limits_{k=1}^{r} c_k \mu(G_k) = \sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{a_i+b_j=c_k} c_k \mu(E_i \cap F_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} (a_i+b_j)\mu(E_i \cap F_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_i \mu(E_i \cap F_j) + \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} b_j \mu(E_i \cap F_j)$.

Es ist $\Omega = \dot\cup E_i = \dot\cup f_j$, also $E_i = \dot{\bigcup\limits_i}(E_i \cap F_j)$,

also $\mu(E_i) = \sum\limits_{j=1}^{m} \mu(E_i \cap F_j)$ und $\mu(F_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(E_i \cap F_j)$. Also gilt

$\int(f+g)d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i) + \sum\limits_{j=1}^{m} a_i \mu(F_j) = \int f d\mu + \int g d\mu$ □

(v) $f \in \mathcal{E}$, $A \in \mathcal{A} \longrightarrow \mu'(A) := \int f 1_A d\mu$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$

Beweis: Sei $f = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i}$ die Standarddarstellung von f. Für alle i gilt $a_i \geq 0$ (da $f \in \mathcal{F}^+$). Es ist $\mu'(A) = \int f 1_A d\mu = \int \sum\limits_{i=1}^{n} a_i 1_{E_i \cap A} d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i \cap A)$.

Die Abbildung $\nu : A \to \mu(E_i \cap A)$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$, denn die Axiome (i), (ii) sind natürlich für ν erfüllt, wenn sie für μ gültig sind. Zum Axiom (iii): $\nu(\dot{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}} A_j) = \mu(E_i \cap \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}} A_j) = \mu(\dot{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}}(E_i \cap A)) \underset{\mu \text{ Maß}}{=} \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(A_j)$.

Also ist μ' eine Linearkombination von Maßen ν_i mit nichtnegativen Koeffizienten a_i, also ist μ' ein Maß.

18.11 Definitionen : Sei $f \in \mathcal{F}^+$. $\int f d\mu := \sup\limits_{\varphi \in \mathcal{E},\, 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \forall x \in \Omega} \int \varphi d\mu$, heißt das **Integral von f bzgl.** μ.

Für $A \in \mathcal{A}$ heißt $\int_A f d\mu := \int f 1_A d\mu$ das **Integral von f über A bezüglich** μ, speziell für das Lebesgue-Maß λ das **Lebesgue-Integral** und für λ_f das **Lebesgue-Stieltjes-Integral**.

18.12 Bemerkungen :

(i) Das Integral ist ein Wert aus $\overline{\mathbb{R}}$.

(ii) Wenn $f \geq 0$ über $]a,b[$Riemann-integrierbar ist, so ist das Riemann-Integral $\int_a^b f dx$ gleich dem Lebesgue-Integral $\int_{]a,b[} f d\lambda$.

(iii) $f, g \in \mathcal{F}^+, f \leq g \longrightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$
Denn: Wenn $\varphi \in \mathcal{E}, 0 \leq \phi(x) \leq f(x)$ gilt, so ist $0 \leq f(x) \leq g(x)$, also gilt

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{C},\, \varphi \leq f} \int \varphi d\mu \leq \sup_{\psi \in \mathcal{C},\, \psi \leq g} \int \psi d\mu$$

.

(iv) $f \in \mathcal{F}^+; M, N \in \mathcal{A}; M \subset N \longrightarrow \int_M f d\mu \leq \int_N f d\mu$
Denn: $M \subset N \longrightarrow f 1_M \leq f 1_N \underset{(iii)}{\longrightarrow}$ Behauptung.

18.13 Satz (Monotoner Konvergenzsatz, Beppo Levi) : Sei (f_ν) eine Folge monoton wachsender Funktionen aus $\mathcal{F}^+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\lim_{\nu \to \infty} f_\nu = f$. Dann gilt $\lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu d\mu = \int f d\mu$.
Beweis:

Beppo Levi (1875- 1961)

I. Nach 18.6 (vii) gilt $f \in \mathcal{F}^+$. Wegen $f_\nu \leq f_{\nu+1} \leq f$ gilt nach 18.12 (iii): $\int f_\nu d\mu \leq \int f_{\nu+1} d\mu \leq \int f d\mu \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$, also (da die monoton wachsende, beschränkte Folge nach 3.7 konvergiert) $\lim_{\nu \to \infty} \int f_\nu d\mu \leq \int f d\mu$.
Wenn $\int f d\mu = \infty$ ist, so gilt die Aussage erst recht.

II. Andere Richtung der Ungleichung:
Seien $\alpha \in]0,1[$, $\varphi \in \mathcal{E}$ mit $\varphi \leq f$. Da nach 18.4(vi) $f_\nu - \alpha\varphi$ $\mathcal{A}$-messbar ist, gilt $M_\nu := (f_\nu - \alpha\varphi)^{-1}(]0,\infty[) = \{\omega \in \Omega : f_\nu(\omega) \geq \alpha\varphi(\omega)\} \subset \mathcal{A}$. Es ist $M_\nu \subset M_{\nu+1}$ und $\bigcup\limits_\nu M_\nu = \Omega$.

Also gilt $\alpha \int\limits_{M_\nu} \varphi d\mu = \int\limits_{M_\nu} \alpha\varphi d\mu \leq \int\limits_{M_\nu} f_\nu d\mu \leq \int f_\nu d\mu$, und mithin

$\alpha \lim \int\limits_{M_\nu} \varphi d\mu \leq \lim \int f_\nu d\mu \qquad \forall \alpha \in]0,1[$.

Da nun $\alpha \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_\nu d\mu \quad \forall \alpha \in]0,1[$ ist, haben wir $\int \varphi d\mu \leq \lim \int f_\nu d\mu$ $\forall \varphi \in \mathcal{E}$, und somit $\sup\limits_{\varphi \in \mathcal{E}, \varphi \leq f} \int \varphi d\mu \leq \lim \int f_\nu d\mu$. □

18.14 Folgerungen :

(i) $f \in \mathcal{F}^+, \gamma \geq 0 \longrightarrow \gamma f \in \mathcal{F}^+, \int \gamma f d\mu = \gamma \int f d\mu$
Beweis: Für $\gamma = 0$ ist die Aussage klar.

Sei $\gamma > 0$: f läßt sich nach 18.6 (viii) schreiben als $\lim \varphi_\nu$ mit $\varphi_\nu \in \mathcal{E}$. Es gilt $\varphi_\nu(x) \leq \varphi_{\nu+1}(x) \leq f(x)$. Also ist $(\gamma\varphi_\nu)$ monoton wachsend mit $\gamma f = \lim \gamma\varphi_\nu$ $(\in \mathcal{F}^+)$ und somit $\int \gamma f d\mu = \lim \int \gamma\varphi_\nu d\mu = \lim \gamma \int \varphi_\nu d\mu = \gamma \lim \int \varphi_\nu d\mu = \gamma \int \lim \varphi_\nu d\mu = \gamma \int f d\mu$. □

(ii) $f, g \in \mathcal{F}^+ \longrightarrow f + g \in \mathcal{F}^+$, $\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$
Beweis: analog zu (i)

18.15 Folgerung (Fatousches Lemma) : Wenn (f_ν) eine Folge aus $\mathcal{F}^+(\Omega, \mathcal{A})$ ist, so gilt $\int (\liminf f_\nu) d\mu \leq \liminf \int f_\nu d\mu$.

Beweis: Sei $g_m := \inf\{f_m, f_{m+1}, \dots\}$. Dann gilt $g_m \leq f_n$ für $n \geq m$ mit $g_m \in \mathcal{F}^+$ nach 18.6 (vi), Aufgabe 100.
Also ist $\int g_m d\mu \leq \int f_n d\mu$ für $n \geq m$ (nach 18.12 (iii)).
g_m ist eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{F}^+$.
Es ist also $\lim g_m = \sup\limits_{n \geq 1} \inf\limits_{m \geq n} f_m = \liminf f_n$.
$\int (\liminf f_n) d\mu = \int \lim g_m d\mu \underset{18.13}{=} \lim \int g_m d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$. □

Pierre Fatou

18.16 Folgerung : $f \in \mathcal{F}^+ \longrightarrow \kappa(M) := \int\limits_M f d\mu$ ist ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$.
Beweis: Da $f \geq 0$ ist, gilt $\kappa(M) \geq 0$. Wenn $M = \emptyset$ ist, so ist $f 1_M \equiv 0$, also

$\kappa(\emptyset) = 0$. Sei $M = \cup_{\nu=1}^{\infty} M_\nu$ und sei $f_n := \sum\limits_{\nu=1}^{n} f 1_{M_\nu}$. Dann ist $\int f_n d\mu \underset{18.14(ii)}{=} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \int f 1_{M_\nu} d\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \kappa(M_\nu)$.

(f_n) ist monoton wachsend mit $\lim f_n = f 1_M$. Also gilt nach 18.13: $\kappa(M) = \int f 1_M d\mu = \int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu = \lim \sum\limits_{\nu=1}^{n} \kappa(M_\nu) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \kappa(M_\nu)$ (Axiom (iii)). □

18.17 Folgerung : Sei $f \in \mathcal{F}^+$.
Dann gilt: $f(x) = 0$ μ-fast-überall $\longleftrightarrow \int f d\mu = 0$.
Beweis: $\leftarrow$: Setze $M_n := \{x \in: f(x) > \frac{1}{n}\}$. Dann ist $f \geq \frac{1}{n} 1_{M_n}$. Also gilt $0 = \int f d\mu \geq \frac{1}{n} \int 1_{M_n} d\mu = \frac{1}{n}\mu(M_n) \geq 0$ und somit $\mu(M_n) = 0$. Mithin hat $\cup M_n = \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$ das Maß 0, also ist $f(x) = 0$ μ-fast-überall.

$\rightarrow$: Sei $f(x) = 0$ μ-fast-überall. Dann ist $\mu(M) = 0$ für
$M = \{x \in \Omega : f(x) > 0\}$. Setze $f_n := n 1_M$. Dann folgt aus 18.15
$0 \leq \int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu = 0$; denn es ist $f \leq \liminf f_n$. □

18.18 Folgerung : Sei $f \in \mathcal{F}^+$ und $\lambda(M) = \displaystyle\int_M f d\mu$. Dann gilt für alle $M \in \mathcal{A}$: $\quad \mu(M) = 0 \longrightarrow \lambda(M) = 0$.
Beweis: Wenn $\mu(M) = 0$ ist, so gilt $f 1_M = 0$ μ-fast-überall; also nach 18.17 $\lambda(M) = \int f 1_M d\mu = 0$. □

18.19 Folgerung : Sei (f_ν) eine Folge monoton wachsender Funktionen in $\mathcal{F}^+(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\lim f_\nu = f$ μ-fast-überall. Dann gilt $\int f d\mu = \lim \int f_\nu d\mu$.
Beweis: Sei $N \subset \Omega$ so gewählt, dass $\mu(N) = 0$ und $f_\nu \to f$ $\forall x \in \Omega \setminus N = M$ gelten. Also gilt $f_\nu 1_M \to f 1_M$, und somit gilt nach 18.13 $\int f 1_M d\mu = \lim \int f_\nu 1_M d\mu$.

$f 1_N$ und $f_\nu 1_N$ verschwinden μ-fast-überall, also gilt $\int f 1_N d\mu = 0 = \int f_\nu 1_N d\mu$. Nun ist $f = f 1_M + f 1_N$, $f_n = f_n 1_M + f_n 1_N$.

Also gilt $\int f d\mu = \int f 1_M d\mu = \lim \int f_\nu 1_M d\mu = \lim \int f_n d\mu$. □

18.20 Folgerung : Sei (f_ν) Folge aus $\mathcal{F}^+$.
Dann gilt $\int (\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} f_\nu) d\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (\int f_\nu d\mu)$.

Denn: Wende auf die Folge $(S_n = \sum\limits_{\nu=1}^{n} f_\nu)$ den Monotonen Konvergenzsatz an.

18.21 Definitionen : Sei $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subset \mathcal{F}(\Omega, \mathcal{A})$ die Menge der reellwertigen $\mathcal{A}$-meßbaren Funktionen f, für die $\int f^+ d\mu$ und $\int f^- d\mu$ endlich sind. Die Elemente aus $\mathcal{L}$ heißen **integrierbare** (oder μ-**summierbare**) Funktionen. Definiere das **Integral von f bezüglich** μ als

$$\boxed{\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu}$$

und für $M \in \mathcal{A}$: $\displaystyle\int_M f d\mu = \int_M f^+ d\mu - \int_M f^- d\mu$.

18.22 Bemerkungen :

(i) $f_1, f_2 \in \mathcal{F}^+$, $f = f_1 - f_2 \longrightarrow \int f d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$
Denn: $f^+ - f^- = f = f_1 - f_2 \longrightarrow f^+ + f_2 = f_1 + f^- \longrightarrow$
$\int f^+ d\mu + \int f_2 d\mu = \int f_1 d\mu + \int f^- d\mu$.
Also gilt $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu = \int f_1 d\mu - \int f_2 d\mu$.

(ii) Wenn $f \in \mathcal{L}$ ist, so definiert $\lambda_\mu(M) := \displaystyle\int_M f d\mu$ ein sog. **signiertes Maß** oder eine **Ladungsverteilung**, d.h. die Maß-Axiome (i), (iii) gelten.
λ_μ heißt das **unbestimmte Integral** von f bzgl. μ.
Denn: $\lambda_\mu^+(M) = \displaystyle\int_M f^+ d\mu$, λ_μ^- sind endliche Maße, also ist $\lambda_\mu = \lambda_\mu^+ - \lambda_\mu^-$ ein signiertes Maß.

(iii) $M = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}} M_i \longrightarrow \displaystyle\int_M f d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{M_i} f d\mu$ (Axiom (iii) für das signierte Maß λ_μ)

(iv) Sei $f \in \mathcal{F}$. Dann gilt: $f \in \mathcal{L} \longleftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$.
In diesem Fall gilt $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$.
Beweis: $\rightarrow$: $f \in \mathcal{L} \rightarrow \int f^+ d\mu < \infty$, $\int f^- d\mu < \infty$.
Also gilt: $\int |f| d\mu = \int (f^+ + f^-) d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$ existiert und ist endlich. Mithin gilt $|f| \in \mathcal{L}$
$\leftarrow$: Wenn $|f| \in \mathcal{L}$ gilt, so ist $\int |f|^+ d\mu$ endlich und gleich $\int (f^+ + f^-) d\mu \underset{n.Vor. f^+, f^- \in \mathcal{F}^+}{=} \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu$. Also gelten $\int f^+ d\mu < \infty, \int f^- d\mu < \infty$, und somit $f \in \mathcal{L}$.
Damit erhalten wir $|\int f d\mu| = |\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu \equiv \int |f| d\mu$. $\square$

(v) $f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{L}, |f| \leq |g| \longrightarrow \int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$
Denn: $f \in \mathcal{F} \rightarrow |f| \in \mathcal{F}^+$

$g \in \mathcal{L} \underset{(iv)}{\longrightarrow} |g| \in \mathcal{L} \longrightarrow |g| \in \mathcal{F}^+$. Nach 18.12 (iii) folgt also $\int |f| d\mu \leq \int |g| d\mu$.

(vi) Das Integral bzgl. μ ist eine Linearform (ein lineares Funktional) $\mathcal{L} \to \mathbb{R}$. (Beweise die Additivität etc.)

(vii) $f, g \in \mathcal{F}, f = g \quad \mu$-fast-überall, $f \in \mathcal{L} \to g \in \mathcal{L} \wedge \int f d\mu = \int g d\mu$.
Denn: Wegen $f = g \quad \mu$-fast-überall, ist $f^+ = g^+ \quad \mu$-fast-überall und $f^- = g^- \mu$-fast-überall. Nach 18.17 ist also $\int f^+ = \int g^+$ und $\int f^- = \int g^-$. Beide sind reelle Zahlen $< \infty$ und daher gilt $\int f d\mu = \int g d\mu$.

18.23 Satz (Lebesguescher Konvergenzsatz; Satz von der majorisierten Konvergenz) : Sei (f_ν) eine Folge aus $\mathcal{L}$ mit $\lim\limits_{\nu \to \infty} f_\nu = f$ μ-fast-überall. Wenn $g \in \mathcal{L}$ mit $|f_\nu| \leq g \; \forall \nu$ existiert, so ist $f \in \mathcal{L}$ und $\int f d\mu = \lim \int f_\nu$.
Beweis: Ändere die Funktionen f_ν, f bezüglich einer Argumentenmenge vom Maß 0 so ab, dass die punktweise Konvergenz nun überall auf Ω gilt; $\lim f_\nu = f$. Nach 18.6 (vi), Aufgabe 130, ist $f \in \mathcal{F}$. Nach Voraussetzung ist $\lim |f_\nu| = |f| \leq |g|$ also gilt nach 18.22 (v) $|f| \in \mathcal{L}$, also 18.22 (iv) $f \in \mathcal{L}$.

Nun gilt $\int g d\mu + \int f d\mu = \int \liminf (f_\nu + g) d\mu \underset{18.15, |f_\nu| \leq g \to g + f_\nu \geq 0}{\leq} \liminf \int (f_\nu + g) d\mu = \liminf \int f_\nu d\mu + \int g d\mu$, also $\int f d\mu \leq \liminf \int f_\nu d\mu$. (*)

Andererseits ist $\int g d\mu - \int f d\mu = \int \liminf (g - f_\nu) d\mu \leq (g - f_\nu \geq 0) \liminf \int (g - f_\nu) d\mu = \int g d\mu - \limsup \int f_\nu d\mu$, also gilt $\limsup \int f_\nu d\mu \leq \int f d\mu$.

Zusammen mit (*) ergibt sich $\int f d\mu = \lim \int f_\nu d\mu$. □

18.24 Definitionen : Sei $p \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq p < \infty$. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}$: f $\mathcal{A}$-messbar und $\int |f|^p d\mu < \infty\}$. $L^p := L^p(\Omega, A, \mu) := \mathcal{L}^p / \underset{\mu}{\sim}$, die Menge der Äquivalenzklassen bezüglich der durch $f \underset{\mu}{\sim} g :\leftrightarrow f = g$ μ-fast-überall definierten Äquivalenzrelation, heißt ein **Lebesgue-Raum**. Auf $\mathcal{L}^p$ bzw. auf L^p sei $||f||_p := (\int |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}}$ definiert. Eine reellwertige Abbildung mit den Eigenschaften 5.1 (ii) und 5.1 (iii) heißt eine **Halbnorm** oder **Pseudonorm**.

18.25 Bemerkungen :

(i) Speziell für $p = 1$ gilt wegen 18.22 (iv): $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$. Die Funktionen von $\mathcal{L}^p$ werden **p-fach μ-integrierbar** oder **integrierbar von der Ordnung p** genannt.

(ii) Analog zu 5.4 gilt die **Hölder-Ungleichung**: Wenn $f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q$, $p > 1, p + q = pq$ gelten, so ist $fg \in \mathcal{L}^1$ und $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q$.

Beweis z.B. bei H. Bauer: Maß- und Integrationtheorie, p. 85f. Satz 14.1.

(iii) Aus der Hölderschen Ungleichung folgt für $p = q = 2$ die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** (vgl. mit 5.4): Wenn $f, g \in \mathcal{L}^2$ sind, so gilt $fg \in \mathcal{L}$ und $\int |fg| d\mu \leq ||f||_2 ||g||_2$.

(iv) Analog zu 5.6 gilt die **Minkowskische Ungleichung**:
$f, g \in \mathcal{L}^p \to f + g \in \mathcal{L}^p \ \wedge \ ||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$.
Beweis bei Bauer (Satz 14.2).

(v) Also ist $|| \ ||_p$ eine Pseudonorm auf $\mathcal{L}^p$, und somit ist $(L^p, || \ ||_p)$ ein normierter $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(vi) Satz von Riesz-Fischer: $(L^p, || \ ||_p)$ ist ein Banachraum.
Beweis bei Bauer (Satz 15.7).

18.26 Definitionen : Ein Prä-Hilbertraum $(H, \langle , \rangle)$, der bezüglich der durch die Form induzierten Norm $||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ vollständig ist, heißt bekanntlich ein **Hilbertraum**. Ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum heißt **vollständig**, wenn es maximal ist.

18.27 Bemerkungen :

i) Endlichdimensionale Prä-Hilberträume sind stets auch Hilberträume.

ii) L^2 mit der Form $\langle f, g \rangle := \int f\overline{g} d\lambda$ ist ein Beispiel für einen unendlichdimensionalen Hilbertraum.

iii) Der Hilbertraum $\prod_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta}_i$ wurde von W. Heisenberg zur Darstellung der Quantenmechanik verwandt. (z.B. bei A. Messiah: Quantum Mechanics, Wiley 1961).

iv) Die Eigenschaft der Vollständigkeit eines Orthonormalsystems $\{e_k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ in einem Hilbertraum H ist äquivalent zu jeder der folgenden Eigenschaften:

(a) Für alle $x \in H$ ist $x = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$ (**Fourierreihendarstellung**) (Vgl. mit 10.8 (vii).)

(b) Für alle $x \in H$ gilt $||x||^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \langle x, e_k \rangle^2$ (**Parsevalsche Gleichung**)

(Vgl. mit 14.17.)

v) In L^2 werden die Konvergenzaussagen über Fourierreihen besonders rund. (Vgl. mit 14.17.)

vi) Orthogonalreihenentwicklungen nach anderen Orthonormalsystemen als den $e^{ik\omega x}$ der Fouriertheorie spielen in den Anwendungen ebenfalls eine große Rolle. Zum Beispiel sind die Hermite-Funktionen die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators der Quantenmechanik, liefern die Legendre-Polynome Lösungen von Potentialproblemen mit Randwerten auf der Kugelsphäre.

18.28 Definitionen :

(i) Ein System $\mathcal{A}$ von Teilmengen von Ω heißt eine **Mengenalgebra**, wenn

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \to \mathcal{C}A \in \mathcal{A}$ und

(iii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \to \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$ gelten.

(ii) Ein **Maß** μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ ist eine Funktion $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) $\mu(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$,

(iii) $\mu(\dot{\bigcup}_{\nu=1}^{\infty} A_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mu(A_\nu) \qquad ((A_\nu)$ eine Folge aus $\mathcal{A})$.

(iii) Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Maßräume. $A_1 \times A_2$ heißt ein **messbares Rechteck**, wenn $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ ist.

(iv) Die Klasse $\mathcal{R} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ aller messbaren Rechtecke bildet eine **Halbalgebra**, d.h., $\emptyset \in \mathcal{R}$; $A_1, A_2 \in \mathcal{R} \to A_1 \cap A_2 \in \mathcal{R}$, und das Komplement eines Elements von $\mathcal{R}$ läßt sich als endliche disjunkte Vereinigung von Elementen in $\mathcal{R}$ schreiben.

(v) Zu jeder Halbalgebra $\mathcal{H}$ von Teilmengen von Ω existiert die kleinste, $\mathcal{H}$ enthaltende Mengenalgebra $\mathcal{A}$, nämlich die Menge, die $\emptyset$ und alle endlichen disjunkten Vereinigungen von Elementen aus $\mathcal{H}$ enthält, geschrieben $\mathcal{A} = \langle\mathcal{H}\rangle$. Speziell für $\mathcal{H} = \mathcal{R}$ schreiben wir die Mengenalgebra als $\mathcal{R}_0 = \langle\mathcal{R}\rangle_{\text{Mengenalg}}$, während das Erzeugnis als σ-Algebra mit $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \langle\mathcal{R}\rangle_{\sigma\text{-Algebra}}$ bezeichnet wird.

18.29 Bemerkungen :

(i) $\mathcal{R}$ ist eine Halbalgebra.
Denn: Es gilt $(A_1 \times A_2) \cap (A_1' \times A_2') = (A_1 \cap A_1') \times (A_2 \cap A_2')$
sowie $\mathcal{C}(A_1 \times A_2) = (\mathcal{C}A_1 \times A_2) \,\dot\cup\, (A_1 \times \mathcal{C}A_2) \,\dot\cup\, (\mathcal{C}A_1 \times \mathcal{C}A_2)$.

(ii) Das Cartesische Produkt $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ der beiden σ-Algebren ist keine Mengenalgebra, also erst recht keine σ-Algebra!
$(A_1 \times A_2) \cup (A_1' \times A_2') \subsetneqq (A_1 \cup A_1') \times (A_2 \cup A_2')$

18.30 Satz (Produktmaß) : Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume. Dann existiert ein Maß $\mu := \mu_1 \otimes \mu_2$ auf der σ-Algebra $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ so, dass (*) $\mu(A_1 \times A_1) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$ für alle $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt. Wenn μ_1, μ_2 σ-endlich sind, so ist μ das eindeutige Maß auf $\mathcal{A}$ mit (*).
Beweis:

I) Seien $\mathcal{R}, \mathcal{R}_0$ wie in 18.26.

Wenn $E \in \mathcal{R}_0$ ist, d.h., $E = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{n}} A_{1k} \times A_{2k}$ mit $A_{1k} \times A_{2k} =: E_k$, $E_k \in \mathcal{R}$,

so definieren wir $\mu_0(E) := \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_1(A_{1k})\mu_2(A_{2k})$.

Es ist $\mu_0(E) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu_0(E_k)$, also μ_0 endliche additive Fortsetzung nach $\mathcal{R}_0$ der durch (*) auf $\mathcal{R}$ definierten Mengenfunktion $\mu|_{\mathcal{R}}$.
Die Definition von μ_0 ist unabhängig von der gewählten disjunkten Vereinigung für E: Sei $E = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{n}} E_k = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{m}} F_j \quad (E_k, F_j \in \mathcal{R})$.

Die $H_{kj} := E_k \cap F_j \in \mathcal{R}$ sind paarweise disjunkt. Es ist $E_k = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{m}} H_{kj}$,

$F_j = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{m}} H_{kj}$.

Also gilt $\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_0(E_k) = \sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}\mu_0(H_{kj}) = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}\mu_0(H_{kj}) = \sum\limits_{j=1}^{m}\mu_0(F_j)$.

Wir zeigen die Eindeutigkeit der endlich additiven Fortsetzung μ_0:

Seien $\mu_0^{'}$ eine weitere additive Fortsetzung von $\mu|_{\mathcal{R}}$ und $E = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{n}} E_k$

Es gilt $\mu_0^{'}(E) = \sum\limits_{k=1}^{n}\mu_0^{'}(E_k) = \sum \mu_0(E_k) = \mu_0(E)$, also $\mu_0^{'} = \mu_0$.

II) Wir zeigen: Wenn μ abzählbar additiv auf $\mathcal{R}$ ist, so ist auch die Fortsetzung μ_0 abzählbar additiv.

Denn: Sei $E = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}} E_k$ mit $E, E_k \in \mathcal{R}_0$, d.h.,

$E = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{n}} A_j$ (a), $\quad E_k = \dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n_k}} B_{ki}$ (b) $\quad$ mit $A_j, B_{ki} \in \mathcal{R}$.

Definiere $C_{jki} := A_j \cap B_{ki}$.

Also gilt weiter $A_j = \dot{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}}\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n_k}} C_{jki}$ (c) $\quad$ und $B_{ki} = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{n}} C_{jki}$ (d).

Dann gilt mit (a), (c), (d), (b) : $\mu_0(E) = \sum\limits_{j=1}^{n}\mu_0(A_j) = \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k}\mu(C_{jki}))$

$= \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{i=1}^{n_k}\sum\limits_{j=1}^{n}\mu(C_{jki})) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{n_k}\mu_0(B_{ki}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_0(E_k)$.

III) Wir zeigen: μ ist auf $\mathcal{R}$ abzählbar additiv.

Denn: Sei $A_1 \times A_2 = \dot{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}} A_{1j} \times A_{2j}$, $\quad A_1 \times A_2,\ A_{1j} \times A_{2j} \in \mathcal{R}$. Dann ist

$1_{A_1 \times A_2}(\omega_{(1)}, \omega_{(2)}) = 1_{A_1}(\omega_{(1)}) 1_{A_2}(\omega(2)) = \sum\limits_{j=1}^{/} \infty 1_{A_{1j}}(\omega_{(1)}) 1_{A_{2j}}(\omega_{(2)})$ für alle $\omega_{(1)} \in \Omega_1$, $\omega_{(2)} \in \Omega_2$.

Integration bezüglich μ_2 bei festem $\omega_{(1)}$ liefert $\int 1_{A_1} 1_{A_2} d\mu = 1_A(\omega_{(1)})\mu_2(A_2) \underset{18.13}{=}$

$\sum\limits_{j=1}^{\infty} \int 1_{A_{1j}} 1_{A_{2j}} d\mu_2 = \sum\limits_{j=1}^{\infty} 1_{A_{1j}}(\omega_{(1)})\mu_2(A_{2j})$.

Nun wird über μ_1 integriert und erneut 18.13 angewandt: $\mu_1(A_1)\mu_2(A_2) =$

$\sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu_1(A_{1j})\mu_2(A_{2j})$, also gilt $\mu(A_1 \times A_2) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\mu(A_{1j} \times A_{2j})$.

IV) Es gibt also nach I, II eine eindeutige Fortsetzung von $\mu\mid_{\mathcal{R}}$ zu einem abzählbar additiven Maß μ_0 auf der Mengenalgebra $\mathcal{R}_0$. Nach dem Fortsetzungssatz von Caratheodory (18.31) existiert eine Fortsetzung von μ_0 zu einem Maß des Messraumes $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, und, wenn μ_1, μ_2 σ-endlich sind, nach dem Hahnschen Fortsetzungssatz (18.32) sogar eindeutig.

18.31 Satz (Caratheodory) : Ein Maß μ auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ kann immer zu einem Maß μ^* auf einer $\mathcal{A}$ enthaltenden σ-Algebra $\mathcal{A}^*$ fortgesetzt werden.
Beweis: Bauer 5.1 bis 5.3.

18.32 Satz (Hahn) : Wenn μ σ-endliches Maß auf einer Mengenalgebra $\mathcal{A}$ ist, dann ist die Fortsetzung zu einem Maß μ^* auf einer $\mathcal{A}$ enthaltenden σ-Algebra $\mathcal{A}^*$ sogar eindeutig.
Beweis: Bauer 5.6.

18.33 Definition : Sei $M \subset \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $\omega_{(1)} \in \Omega_1$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$. $M_{\omega_{(1)}} := \{\omega_{(2)} \in \Omega_2 : (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}) \in M\}$ heißt der **$\omega_{(1)}$-Schnitt von M**. $M^{\omega_{(2)}} := \{\omega_{(1)} \in \Omega_1 : (\omega_{(1)}, \omega_{(2)}) \in M\}$ heißt der **$\omega_{(2)}$-Schnitt von M**.

$f_{\omega_{(1)}} : \Omega_2 \to \overline{\mathbb{R}}$, definiert durch $f_{\omega_{(1)}}(\omega_{(2)}) = f(\omega_{(1)}, \omega_{(2)})$, heißt der **$\omega_{(1)}$-Schnitt von f**. Analog wird der ω_2-Schnitt von f definiert und mit $f^{\omega_{(2)}}$ bezeichnet.

18.34 Satz :

(i) Wenn M eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbare Teilmenge von Ω ist, so ist $M_{\omega_{(1)}}$ $\mathcal{A}_2$-messbar und $M_{\omega_{(2)}}$ $\mathcal{A}_1$-messbar.

(ii) Wenn $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbar ist, so ist $f_{\omega_{(1)}}$ $\mathcal{A}_2$-messbar und $f_{\omega_{(2)}}$ $\mathcal{A}_1$-messbar.

Beweis:

(i) Sei $\mathcal{E}$ die Menge derjenigen Teilmengen von Ω, für die jeder Schnitt messbar ist. Es ist $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$; denn, wenn $M = A_1 \times A_2$ ein messbares Rechteck ist, so ist z.B. $M_{\omega_{(1)}} = \begin{cases} A_2 & \text{, wenn } \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & \text{, wenn } \omega_1 \notin A_1 \end{cases}$. Also ist $M_{\omega_{(1)}}$ $\mathcal{A}_2$-messbar.

Da $\mathcal{E}$ eine σ-Algebra ist, ist $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{E}$.
Wenn also $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt, dann ist $M \in \mathcal{E}$ und somit ist nach Definition von $\mathcal{E}$ jeder Schnitt von M messbar.

(ii) Seien $\omega_{(1)} \in \Omega_1$ und $\gamma \in \mathbb{R}$.

Dann ist $\{\omega_{(2)} \in \Omega_2 : f_{\omega_{(1)}}(\omega_{(2)})(= f(\omega_{(1)}, \omega_{(2)})) > \gamma\} =$
$\{(\omega_{(1)}, \omega_{(2)}) \in \Omega : f(\omega_{(1)}, \omega_{(2)}) > \gamma\}_{\omega_{(1)}} = M_{\omega_{(1)}}$.

Also gilt: Wenn f $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-messbar ist, so folgt nach 18.4 (vi) $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und somit nach (i), dass $M_{\omega_{(1)}}$ $\mathcal{A}_2$-messbar, also $f_{\omega_{(1)}}$ $\mathcal{A}_2$-messbar ist. □

18.35 Definitionen : Wenn (E_n) eine Folge von Mengen mit $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E$ ist, so sagen wir (E_n) **konvergiert monoton fallend gegen E**, geschrieben $E_n \downarrow E$.

Analog schreiben wir: $E_n \uparrow E$, falls $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Im Falle $E_n \uparrow E$ oder $E_n \downarrow E$ wird E auch als $\lim E_n$ bezeichnet.

Eine Klasse $\tilde{\mathcal{R}} \neq \emptyset$ von Mengen mit

$$E_1 \subset E_2 \subset \ldots\ (E_i \in \tilde{\mathcal{R}}\ \forall i) \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \tilde{\mathcal{R}} \qquad \text{und}$$

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots\ (F_i \in \tilde{\mathcal{R}}\ \forall i) \longrightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \in \tilde{\mathcal{R}}$$

heißt eine **monotone Klasse**.

18.36 Lemma (Monotones Klassen-Lemma) : Sei Ω eine Menge und sei $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra über Ω. Dann gilt: $\langle\mathcal{A}\rangle_{\sigma\text{-Alg.}} = \langle\mathcal{A}\rangle_{\text{monot. Kl.}}$

Beweis: $\langle\mathcal{A}\rangle_{\sigma\text{-Alg.}}$ ist eine monotone Klasse, also gilt trivialerweise $\langle\mathcal{A}\rangle_{\text{monot. Kl.}} \subset \langle\mathcal{A}\rangle_{\sigma\text{-Alg.}}$.

Zu zeigen bleibt also, dass $\tilde{\mathcal{R}} := \langle\mathcal{A}\rangle_{\text{monot. Kl.}}$ eine σ-Algebra ist. Für $E \in \tilde{\mathcal{R}}$ definiere $\tilde{\mathcal{R}}_E := \{F \in \tilde{\mathcal{R}} : F \cap \mathcal{C}E \in \tilde{\mathcal{R}}\ \vee\ E \cap \mathcal{C}F \in \tilde{\mathcal{R}}\ \vee\ E \cup F \in \tilde{\mathcal{R}}\}$.

Es gilt $F \in \tilde{\mathcal{R}}_E \longleftrightarrow E \in \tilde{\mathcal{R}}_F$ (wg. der Symmetrie der Definition von $\tilde{\mathcal{R}}_E$ bzgl. E und F).

Sei (F_n) eine monotone Folge aus $\tilde{\mathcal{R}}_E$.

Dann ist $(\lim F_n) \cap \mathcal{C}E = \lim(F_n \cap \mathcal{C}E) \in \tilde{\mathcal{R}}$ (Distributivgesetz, $F_n \cap \mathcal{C}E \in \tilde{\mathcal{R}}$, da $F_n \in \tilde{\mathcal{R}}_E$, da $\tilde{\mathcal{R}}$ monoton).

$E \cap \mathcal{C}(\lim F_n) = E \cap \lim \mathcal{C}F_n = \lim(E \cap \mathcal{C}F_n) \in \tilde{\mathcal{R}}$.

$E \cup \lim F_n = \lim E \cup F_n \in \tilde{\mathcal{R}}$.

Also ist $\lim F_n \in \tilde{\mathcal{R}}_E$. Mithin ist $\tilde{\mathcal{R}}_E$ eine monotone Klasse für jedes $E \in \tilde{\mathcal{R}}$ (*).

Seien nun $E, F \in \mathcal{A}$. Da $\mathcal{A}$ eine Mengenalgebra ist, gilt $E \in \tilde{\mathcal{R}}_F$ und $F \in \tilde{\mathcal{R}}_E$.

Also gilt $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{R}}_E \;\; \forall E \in \mathcal{A}$, also $\tilde{\mathcal{R}} \subset \tilde{\mathcal{R}}_E \;\; \forall E \in \mathcal{A}$.

Es gilt aber sogar: $\tilde{\mathcal{R}} \subset \tilde{\mathcal{R}}_F \;\; \forall F \in \tilde{\mathcal{R}}$.

Denn: Für $F \in \tilde{\mathcal{R}}$, $E \in \mathcal{A}$ gilt $F \in \tilde{\mathcal{R}}_E$, also $E \in \tilde{\mathcal{R}}_F$, also $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{R}}_F \;\; \forall F \in \tilde{\mathcal{R}}$. Wegen (*) ist also $\tilde{\mathcal{R}} \subset \tilde{\mathcal{R}}_F \;\; \forall F \in \tilde{\mathcal{R}}$.

Also ist $\tilde{\mathcal{R}}$ eine Mengenalgebra (denn: $E, F \in \tilde{\mathcal{R}} \longrightarrow E \cup F \in \tilde{\mathcal{R}}$ etc.).

Zu zeigen bleibt das Axiom (iii) der σ-Algebrendefinition:

Sei (F_n) eine Folge in $\tilde{\mathcal{R}}$. Definiere $G_n := \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$.

(G_n) ist monoton wachsend und ist Folge aus $\tilde{\mathcal{R}}$, da $\tilde{\mathcal{R}}$ eine Mengenalgebra ist. Es gilt $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = \lim G_n \in \tilde{\mathcal{R}}$ (da $\tilde{\mathcal{R}}$ eine monotone Klasse ist), also $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \in \tilde{\mathcal{R}}$ gilt. □

18.37 Satz : Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume.

Wenn $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist, so sind $f(\omega_{(1)}) := \mu_2(M_{\omega_{(1)}})$ und $g(\omega_{(2)}) := \mu_1(M^{\omega_{(2)}})$ messbar, und es gilt $\int_{\Omega_1} f d\mu_1 = \mu_1 \otimes \mu_2(M) = \int_{\Omega_2} g d\mu_2$.

Beweis: Sei $\tilde{\mathcal{R}}$ die Klasse aller $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, für die die Behauptung gilt.

Wir zeigen: $\tilde{\mathcal{R}}$ ist eine monotone Klasse, die die Mengenalgebra $\mathcal{R}_0$ enthält. Dann ist nämlich nach 18.36 $\tilde{\mathcal{R}}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{R}_0$ enthält, also gilt $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, und der Satz ist bewiesen.

Sei $\{E_1, \ldots, E_k\}$ eine paarweise disjunkte Teilklasse von $\tilde{\mathcal{R}}$.

Da $(\dot{\bigcup\limits_{\nu=1}^{k}} E_\nu)_{\omega_{(1)}} = \bigcup\limits_{\nu=1}^{k} (E_\nu)_{\omega_{(1)}} \quad \forall \omega_{(1)} \in \Omega_1$ und $(\bigcup\limits_{\nu=1}^{k} E_\nu)^{\omega_{(2)}} = \bigcup\limits_{\nu=1}^{k} (E_\nu)^{\omega_{(2)}} \quad \forall \omega_{(2)} \in \Omega_2$ gelten, folgt $\dot{\bigcup\limits_{\nu=1}^{k}} E_\nu \in \tilde{\mathcal{R}}$.

$\tilde{\mathcal{R}}$ enthält also alle endlichen disjunkten Vereinigungen von messbaren Rechtecken.

Sei nun $E_n \uparrow$ in $\tilde{\mathcal{R}}$ und sei $E := \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} E_\nu = \lim E_\nu$. Dann gilt

$\mu_2(E_{\omega_{(1)}}) = \lim\limits_{\nu \to \infty} \mu_2((E_\nu)_{\omega_{(1)}}) \quad \forall \omega_{(1)} \in \Omega_1$.

Dann ist nach 18.36 $\tilde{\mathcal{R}}$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{R}_0$ enthält. Also gilt $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. □

18.38 Satz (Tonelli) : [2] Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume, und es sei F eine nichtnegative messbare Funktion auf $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ nach $\overline{\mathbb{R}}$. Dann sind die Funktionen $f(\omega_{(1)}) = \int_{\Omega_2} F_{\omega_{(1)}} d\mu_2$, $g(\omega_{(2)}) = \int_{\Omega_1} F^{\omega_{(2)}} d\mu_1$ messbar, und es ist $\int_{\Omega_1} f d\mu_1 = \int_{\Omega} F d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_2} g d\mu_2$

oder in anderer Notation: $\int_{\Omega_1} \int_{\Omega_2} F d\mu_2 d\mu_1 = \int_{\Omega} F d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_2} \int_{\Omega_1} F d\mu_1 d\mu_2$.

Beweis:

I) Wenn $F = 1_M$ mit $M \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist, dann liefert 18.37 die Behauptung; denn $f(\omega_{(1)}) = \int_{\Omega_2} F_{\omega_{(1)}} d\mu_2 = \int_{\Omega_2} 1_{\omega_{(1)}} d\mu_2 = \mu_2(M_{\omega_{(1)}})$ etc.

Wegen der Linearität gilt also die Behauptung auch für messbare Elementarfunktionen (Standarddarstellung!!).

II) Wenn schließlich $F \in \mathcal{F}^+(\Omega, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ gilt, so gibt es nach 18.6 (viii) eine Approximation (Φ_n) von unten an F durch monoton wachsende Elementarfolgen. Dann sind $\varphi_n(\omega_{(1)}) = \int_{\Omega_2} [\Phi_n]_{\omega_{(1)}} d\mu_2$ und $\psi_n(\omega_{(2)}) = \int_{\Omega_1} [\Phi_n]^{\omega_{(2)}} d\mu_1$ messbar und monoton.

Nach 18.13 gilt $\lim \varphi_n(\omega_{(1)}) = \int_{\Omega_2} F_{\omega_{(1)}} d\mu_2 = f(\omega_{(1)})$, $\lim \psi_n(\omega_{(2)}) = \int_{\Omega_1} F^{\omega_{(2)}} d\mu_1 = g(\omega_{(2)})$ und $\int_{\Omega_1} f d\mu_1 = \lim \int_{\Omega_1} \varphi_n d\mu_1 =$
$\lim \int_{\Omega} \Phi_n d(\mu_1 \times \mu_2) = \int_{\Omega} F d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \lim \int_{\Omega_2} \psi_n d\mu_2 = \int_{\Omega_2} g d\mu_2$. $\square$

Das führt schließlich zu dem wichtigen Satz:

[2] Leonida Tonelli (1885 - 1946) studierte in Bologna und wirkte hauptsächlich an der Universität Pisa. Er arbeitete über reelle Funktionen und Variationsrechnung.

18.39 Satz (Fubini) : Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ σ-endliche Maßräume. Wenn $F : \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ integrierbar bezüglich $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist, dann haben die f.ü. definierten Funktionen $f(\omega_{(1)}) = \int_{\Omega_2} F_{\omega_{(1)}} d\mu_2$, $g(\omega_{(2)}9 = \int_{\Omega_1} F^{\omega_{(2)}} d\mu_1$ endliche Integrale, und es gilt $\int_{\Omega_1} f d\mu_1 = \int_{\Omega} F d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_2} g d\mu_2$ oder in anderer Nomenklatur: ...
Beweisidee: Anwendung des Satzes von Tonelli auf F^+, F^-.

Guido Fubini (1897 - 1943)

18.40 Bemerkungen : Für die Aussage bezüglich des Riemannschen Integrals muß zunächst die Existenz des „inneren“ Integrals $\int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(\xi, \eta) d\xi = g(\eta)$ vorausgesetzt werden!

Sei z.B. f auf $[\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ Riemann integrierbar, aber sei die Menge der Unstetigkeitsstellen von f (die Maß 0 hat) $\{\xi_0\} \times [\gamma, \delta]$ für ein $\xi_0 \in [\alpha, \beta]$.

Dann existiert zwar $\int_{[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]} f$, aber $\int_{\gamma}^{\delta} f(\xi_0, \eta) d\eta$ ist nicht definiert, und mithin ist es nicht möglich, das Integral als $\int_{\alpha}^{\beta} (\int_{\gamma}^{\delta} f(\xi, \eta) d\eta) d\xi$ zu berechnen.