Kapitel 3

Folgen und Reihen

Das Thema „Folgen und Reihen“ war und ist grundlegend für den Bereich der Analysis: nicht nur, weil es am Anfang der historischen Entwicklung steht, sondern auch, weil das Thema durch den allseitigen Gebrauch von Rechnern noch bedeutsamer geworden ist. Schließlich lässt es sich auch unter ganz modernen Sichtweisen beleuchten: algorithmische Aspekte der Konvergenz, aber auch Konvergenz als dynamischer Prozeß.

3.1 Definitionen : Es seien M eine Menge mit (der abstrakten) Ordnungsrelation $\leq$ und $S \subset M$.

(i) $a \in M$ heißt ein **maximales Element** , wenn

$$\forall x \in M : (a \leq x \to x \leq a) \quad .$$

(ii) Analog sei ein **minimales Element** definiert.

(iii) $b \in M$ heißt eine **obere Schranke** für S in M, wenn $x \leq b$ für alle $x \in S$ gilt.

(iv) $s \in M$ heißt **Supremum** oder **obere Grenze** von S in M, geschrieben $\sup_M S$, wenn s eine obere Schranke von S ist und für jede obere Schranke b in M $s \leq b$ gilt.

(v) Analog sei **Infimum** und $\inf_M S$ definiert.

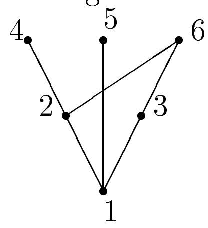
(vi) M heißt **vollständig** (präziser: **supremumsvollständig**), wenn jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von M ein Supremum besitzt.

Slogan: Das Supremum ist die kleinste obere Schranke, das Infimum die größte untere Schranke.

3.2 Bemerkungen :

(i) Wenn $\sup_M S$ existiert, so eindeutig.
Denn: Wenn s_1 und s_2 Suprema von S sind, so sind beide kleinste obere Schranken, also $s_1 \le s_2$ und $s_2 \le s_1$. Mithin ist $s_1 = s_2$.

(ii) Beispiel: Sei $S := \{1,2,3,4,5,6\} \subset M = \mathbb{N}$. Als Ordnungsrelation $\le$ sei die Relation „ist Teiler von" gewählt. Dann sind 4, 5, 6 die maximalen Elemente von S bezüglich dieser $\le$-Relation. Die Menge der oberen Schranken von S in $\mathbb{N}$ ist $\{60 \cdot m : m \in \mathbb{N}\}$, und es gilt $\sup_{\mathbb{N}} S = 60$ sowie $\inf_{\mathbb{N}} S = 1$.



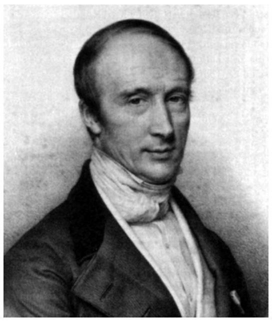
3.3 Satz : Es gibt bis auf Isomorphie genau einen angeordneten, vollständigen Körper, den Körper $\mathbb{R}$ der **reellen Zahlen**.
Beweis: z.B. in E. Mendelson, Number systems and the foundations of analysis, Academic Press, New York 1973.

3.4 Definitionen : Sei K ein Körper mit Absolutbetrag.

(i) Eine Abbildung $\mathbb{N} \to K$ mit $n \mapsto a_n$ heißt eine **Folge** in K, geschrieben (a_n). Wir sagen $(a_n) = (b_n)$, wenn $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(ii) (a_n) heißt (dem Betrage nach) **beschränkt** , wenn $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.

(iii) (a_n) heißt eine **Cauchy-Folge**, wenn $\bigwedge_{\varepsilon \in \overline{P}} \bigvee_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} \bigwedge_{m,n \ge N_\varepsilon} |a_m - a_n| < \varepsilon$ gilt.



Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857)

(iv) $b \in K$ heißt der **Limes** von (a_n) in K, geschrieben $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ oder $a_n \to b$, wenn $\bigwedge_{\varepsilon \in \overline{P}} \bigvee_{N_\varepsilon \in \mathbb{N}} \bigwedge_{n \ge N_\varepsilon} |a_n - b| < \varepsilon$ gilt.

(v) Wenn (a_n) in K einen Limes hat, so heißt die Folge in K **konvergent**, andernfalls **divergent** .[1]

(vi) Wenn der Limes 0 ist, so sprechen wir von einer **Nullfolge**.

(vii) K heißt **Cauchy-vollständig** , wenn jede Cauchy-Folge aus K einen Limes in K besitzt.

Slogan: $b = \lim a_n$ bedeutet: Zu jeder noch so kleinen ε-Umgebung U_ε von b existiert eine Nummer N so, dass ab diesem Index N alle Glieder der Folge in U_ε liegen.

3.5 Bemerkungen :

(i) Einige Beispiele für Folgen in $\mathbb{R}$:
$((-1)^n n)$ ist nicht beschränkt, $((-1)^{n+1}\frac{1}{n})$ ist beschränkt, z.B. durch 1. Die Folge ist eine Nullfolge, da nach 2.36(ii) $|\frac{(-1)^n}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ für genügend großes n gemacht werden kann.
$(\frac{5n}{n+1})$ ist eine Cauchy-Folge; denn es gilt: $|\frac{5m}{m+1} - \frac{5n}{n+1}| = 5\cdot|\frac{m-n}{(m+1)(n+1)}| = 5 \cdot |\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}{\frac{1}{mn}+\frac{1}{n}+\frac{1}{m}+1}| \leq 5 \cdot |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}| \leq 5 \cdot (\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$. Letzteres kann kleiner als vorgelegtes ε gemacht werden, da nach 2.36 (ii)
$\exists N \forall n \geq N : \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{10}$.

(ii) Der Limes ist – falls existent – stets eindeutig bestimmt.
Denn: Seien b, b' Limites von (a_n). Unter der Annahme $b \neq b'$ erhalten wir $|b - b'| > 0$. Wähle $\varepsilon := \frac{|b-b'|}{2}$. Nach 3.4 $\exists N\, \forall n \geq N : (|a_n - b| < \varepsilon \wedge |a_n - b'| < \varepsilon)$. Also wäre $|b-b'| = |b-a_n+a_n-b'| \leq |a_n-b|+|a_n-b'| < 2\varepsilon = |b - b'|$, was einen Widerspruch bedeutet.

(iii) Wenn eine Folge konvergiert, so ist sie Cauchy-Folge.
Denn: Sei $b = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in K$, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - b| < \varepsilon$. Dann gilt für alle $m, n \geq N : |a_m - a_n| = |a_m - b + b - a_n| \leq |a_m - b| + |a_n - b| < 2\varepsilon$.

(iv) Es gilt $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$ sowie $\lim(a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n$, falls $\lim a_n$ und $\lim b_n$ existieren.

[1]Der Limes einer Folge tritt schon 1655 bei John Wallis auf (in Opera I, 382). Die Bezeichnungen „konvergent“und „divergent“kommen wohl zum ersten Mal bei James Gregory vor (Vera circuli et hyperbolae quadratura. Patavii 1668). Leibniz benutzt den Ausdruck „advergent“. Eine exakte Definition der Konvergenz erfolgte (im Zusammenhang mit Reihen) durch Bolzano und Cauchy (siehe Fußnote S. 76).

Denn: Wieder können wir die Dreiecksungleichung nutzen:

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \quad .$$

(v) Es seien $\lim a_n$ und $\lim b_n$ existent. Dann gilt: Wenn $\bigvee_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge_{n\geq N} a_n \leq b_n$, so ist $\lim a_n \leq \lim b_n$.
Achtung: Eine analoge Aussage für das Zeichen $<$ gilt **nicht**! Z.B. gilt für $a_n := 0 < b_n := \frac{1}{n}$ der Grenzwert $\lim a_n = \lim b_n = 0$.

(vi) Naturwissenschaftler sollten auch die folgende Implikation unserer Limes-Definition für den Hardware-Bereich kennen: Die Elemente der Folge (a_n) seien die Ergebnisse eines unendlichen Algorithmus, der etwa auf einem Computer mittels eines C-Programms implementiert sei. Das Makro LDBL_EPSILON aus $\langle float.h\rangle$ stellt bekanntlich die kleinste Fließkommazahl x dar, für die noch $1.0+x$!= 1.0 erkannt wird. Wenn die a_n also Fließkommazahlen sind und wenn $\frac{\varepsilon}{|a_{N_\varepsilon}|} <$ LDBL_EPSILON ist, so kann die Maschine die Ausgabewerte nach a_{N_ε} nicht mehr voneinander unterscheiden (jedenfalls nicht ohne zusätzliche Multipräzisions-Pakete für Fließkommazahlen), der Algorithmus kann also abgebrochen werden.
Denn: Es gilt doch $|b - a_{N_\varepsilon}| < \varepsilon$, also $1.0 + |\frac{b}{|aN_\varepsilon|} - 1| == 1.0$, also $b == a_{N_\varepsilon}$.

(vii) Anfängern bereiten mehrere Aspekte der Epsilontik Schwierigkeiten: Zunächst das gleichzeitige Auftreten mehrerer Quantoren. Dann die Tatsache, dass man den Limes „eigentlich“ schon kennen muss, wenn er mittels der Definition mit N und ε als solcher erwiesen werden soll. Das steht jedoch in einem dialektischen Spannungsverhältnis dazu, dass der Limes oft gerade „eigentlich unzugängliche“ Objekte beschreibt. Ferner müssen sich Anfänger daran gewöhnen, dass häufig mehr die Frage nach der Existenz des Grenzwerts interessiert als die Frage, wie er „aussieht“. Zum Beispiel gilt:

(viii) In Cauchy-vollständigen Körpern sind genau die Cauchy-Folgen konvergent.
Denn: Die Aussage folgt aus der Definition 3.4 und aus 3.5 (iii).
Auch der folgende Satz 3.7 hebt mehr auf die Eigenschaft der Konvergenz ab.

3.6 Definitionen : Seien M und N linear geordnete Mengen. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **monoton wachsend** , wenn

$\bigwedge\limits_{m_1<m_2;\, m_1,m_2\in M} f(m_1) \leq f(m_2)$ gilt. Analog wird **monoton fallend** definiert. Wenn eine Abbildung monoton wachsend oder monoton fallend ist, so heißt sie **monoton**. Wenn $\bigwedge\limits_{m_1<m_2} f(m_1) < f(m_2)$ gilt, so heißt die Abbildung **streng monoton wachsend**. Über die Interpretation der Folgen als Funktionen $f : \mathbb{N} \to K$ haben wir damit auch die Monotoniebegriffe für Folgen.

3.7 Satz : Jede beschränkte, monotone Folge (a_n) von Elementen aus $\mathbb{R}$ konvergiert, und es gilt in diesem Fall: $\lim a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \vee \lim a_n = \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Beweis: Sei (a_n) beschränkt und etwa monoton wachsend. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert $\sup\{a_1, a_2, \dots\} := s$. $s - \varepsilon$ ist also keine obere Schranke von (a_n), d.h. $\exists N \in \mathbb{N} : s - \varepsilon < a_N$, und daher gilt wegen der Monotonie $\forall n \geq N : s - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq s$, also $\forall n \geq N : |s - a_n| = s - a_n < \varepsilon$.

3.8 Beispiele :

(i) Sei $a_n := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu}$. Dann gilt doch $1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}} + \ldots >$
$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$, da $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8}$ etc .
Daher ist (a_n) nicht beschränkt und damit auch nicht konvergent.

(ii) Sei $a_n := \sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu^2} = 1 + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot n} < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} =$
$1 + (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots + (\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{1} - \frac{1}{n} < 2.$
Also ist (a_n) beschränkt, und es ist monoton wachsend. Daher ist (a_n) nach 3.7 konvergent.

Dies ist ein Beispiel für eine reine Konvergenzaussage. Den Grenzwert hat man damit noch längst nicht.[2]

(iii) Für die Folge $(\sum \frac{1}{\nu^3})$, die auch konvergent ist, war bis vor kurzem noch nicht einmal bekannt, ob der Limes eine irrationale Zahl ist.[3]

(iv) Das allgemeine Glied der nun betrachteten Folge sei eine sog. **geometrische Summe** :
$a_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} q^\nu,\ q \in K.$

[2] In Teil 2, Kap. 14, wird gezeigt werden: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6}$.

[3] Das wurde erst 1979 von R. Apéry bewiesen.

Die **geometrische Summe** läßt sich als geschlossener Ausdruck darstellen:

$$\begin{array}{rcl} 1+q+q^2+\ldots+q^{n-1} & = & a_n \\ -(q+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n) & = & qa_n \\ \hline 1 \qquad\qquad\qquad -q^n & = & a_n(1-q)\ . \end{array}$$

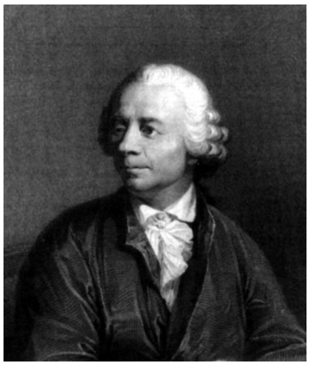
Also $a_n = \frac{1-q^n}{1-q}$. Wenn $0 < |q| < 1$, $|q| \in \mathbb{R}$, gilt, so wird $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1-q}$, da nach 2.37(v) in archimedisch angeordneten Körpern für $|q| < 1$ $\lim q^n = 0$ gilt.

(v) Sei $a_n := \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}$. Da $\nu! = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots \nu \geq 2^{\nu-1}$ ist, gilt

$$a_n \leq 1+1+\frac{1}{2^0}+\ldots+\frac{1}{2^{\nu-1}} = 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^\nu}{1-\frac{1}{2}} < 1+2 \quad .$$

Mithin ist (a_n) monoton und beschränkt, also existiert der Limes.

Dieser Limes $e := \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!}$ heißt **Eulersche Zahl**. Der Wert berechnet sich zu $e \approx 2,71828\ldots$.



Leonhard Euler* *(1707 - 1783)

(vi) Es gilt ferner $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$.
Denn: Wir zeigen zunächst, dass die vorgelegte Folge monoton ist, also, dass $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \geq (1+\frac{1}{n})^{-1}$ ist.
Zu zeigen ist also $(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}(1-\frac{1}{n+1})^{n+1} \geq 1+\frac{1}{n+1}$. Aufgrund der Bernoullischen Ungleichung (2.36 (iii)) gilt aber $(1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1} \geq 1+(n+1)\frac{-1}{(n+1)^2}$. Also ist die Folge monoton.

Sie ist aber auch beschränkt: $(1+\frac{1}{n})^n = 1+\binom{n}{1}\frac{1}{n}+\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\frac{1}{3!}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}+\ldots < 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!} < e$.

Es existiert also $e' := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sup(a_n) \leq e$.

Wenn $n \geq k$ ist, so gilt $(1+\frac{1}{n})^n \geq 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{1}{k!}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} =: b_n$.

Also $e' = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1+\frac{1}{1!}+\ldots+\frac{1}{k!}$, und daher gilt auch $e' \geq e$. □

(vii) Wir beweisen nun die Existenz von $\sqrt{a}$ in $\mathbb{R}$, wenn $a > 0$ ist. Wir führen die Aufgabe auf das Problem zurück, für $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ einen **Fixpunkt** zu finden.

Für $x \neq 0$ gilt nämlich die Äquivalenz

$$(\,*\,) \qquad x^2 = a \leftrightarrow x = \frac{a}{x} \leftrightarrow x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \quad .$$

Ein Weg zur Lösung von Fixpunktproblemen geht über **Iteration** [4] : $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$ (sog. **Heronisches Verfahren**) .

Die Folge (a_n) ist nach unten beschränkt, da $a_{n+1}^2 - a = (\frac{a_n + \frac{a}{a_n}}{2})^2 - a = \frac{1}{4}(a_n^2 - 2a + \frac{a^2}{a_n^2}) = \frac{1}{4}(a_n - \frac{a}{a_n})^2 \geq 0$ ist.
Die Folge ist auch monoton fallend, denn es ist: $a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{a}{2a_n} = \frac{1}{2}(a_n - \frac{a}{a_n}) = \frac{1}{2a_n}(a_n^2 - a) \geq 0$. Also existiert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: \sqrt{a}$ und wegen $*$ ist $(\sqrt{a})^2 = a$. Dieses schnell konvergierende Verfahren wird auch in Rechnern benutzt.

Um einen Überblick über die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhalten, führen wir eine **Fehlerabschätzung** durch:
Der sog. **relative Fehler** beträgt $\delta_n := \frac{|a_n - \sqrt{a}|}{\sqrt{a}}$. Es ist $\delta_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{a_n^2 + a - 2a_n\sqrt{a}}{2a_n\sqrt{a}} = \frac{(a_n - \sqrt{a})^2}{2a_n\sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}^2} = \frac{1}{2}\delta_n^2$.

Wenn also der Fehler beim n-ten Schritt 10% beträgt, so beim $(n+1)$-ten Schritt $\delta_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{10})^2 < \frac{1}{100}$, also $< 1\%$. Beim $(n+2)$-ten Schritt beträgt er dann schon weniger als $0,01\%$ usf.

„Die Anzahl der richtigen Dezimalstellen verdoppelt sich bei jedem Schritt.“

3.9 Definitionen : Sei (a_n) eine Folge von Elementen des Körpers K mit Absolutbetrag.

[4] Vgl. die Passagen zum **Banachschen Fixpunktsatz** in Teil 2, Kapitel 16.

(i) Die Folge (s_n) der **n-ten Partialsummen** $s_n := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu$ heißt eine **unendliche Reihe**.

(ii) Konvergiert (s_n), so nennen wir die unendliche Reihe **konvergent** und schreiben $\lim s_n =: \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$, andernfalls **divergent**.

(iii) Analog wird $\sum_{\nu=k}^{\infty} a_\nu$ definiert.

(iv) Die Reihe $\sum_{\nu}^{\infty} a_\nu$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum_{\nu} |a_\nu|$ konvergiert.[5]

3.10 Bemerkungen :

(i) Jede Reihe ist als Folge definiert, aber auch jede Folge lässt sich als Reihe darstellen.
Denn: Sei (c_n) als Folge gegeben. Wir definieren eine neue Folge (a_n), deren Partialsummen gerade die Glieder von (c_n) sind:
$a_0 := c_0, \ \ldots \ , a_n := c_n - c_{n-1}$.

(ii) Wenn $\sum a_\nu$, $\sum b_\nu$ konvergieren und $c, d \in K$ sind, so ist $\sum(ca_\nu + db_\nu) = c\sum a_\nu + d\sum b_\nu$.
Denn: Folgt unmittelbar aus 3.5 (iv).

(iii) Für Folgen nichtnegativer reeller Zahlen gilt: $\sum a_\nu$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen beschränkt ist.
Denn: Die Aussage folgt unmittelbar aus 3.7.

(iv) Die **harmonische Reihe** $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}$ ist divergent.[6] (3.8 (i))

---

[5]Erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts begann man, sich um einen exakten Umgang mit dem Limesbegriff zu bemühen (vgl. auch die Ausführungen von S. 2/3). Fourier gab 1811 eine zufriedenstellende Definition der Konvergenz (Analytische Theorie der Wärme), wiewohl auch er noch mit divergenten Reihen hantierte. So wie in unserem Text definierten Bernhard Bolzano1817 und L. A. Cauchy 1821 (in Cours d'analyse) den Konvergenzbegriff. P. L. Dirichlet führte 1837 die absolute Konvergenz im Zusammenhang mit dem Problem der Umordnung von Reihen ein (Abh. Königl. Akad. d. Wiss., Berlin 1837, 45 - 81).

[6]Beweis Kardinal N. de Oresme († 1382)

(v) Die **geometrische Reihe** $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} q^\nu$ ist für $|q| < 1$ konvergent zum Wert $\frac{1}{1-q}$.[7]
Denn: 3.8 (iv).

(vi) In Cauchy-vollständigen Körpern gilt das sog. **Cauchy-Kriterium**:
$\sum a_\nu$ konvergiert genau dann, wenn $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge\limits_{m\geq n\geq N} |\sum\limits_{\nu=n}^{m} a_\nu| < \varepsilon$ gilt.
In beliebigen Körpern ist das Kriterium nur notwendig für Konvergenz (3.5 (iii)).

(vii) Bei Konvergenzfragen von Folgen (a_n) genügt es, nur alle Glieder ab einem beliebig aber fest gewählten Index zu betrachten, also alle Glieder mit Ausnahme von endlich vielen.

(viii) Wenn $\sum a_\nu$ konvergiert, so ist $\lim a_\nu = 0$.
Denn: Die Aussage ist ein Spezialfall der Richtung $\rightarrow$ von (vi).

(ix) **Leibnizkriterium** [8] für alternierende Reihen in $\mathbb{R}$: Wenn (a_n) eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\lim a_n = 0$ ist, so ist $\sum\limits_{\nu}^{\infty} (-1)^\nu a_\nu$ konvergent.

Denn: Für die folgende Differenz der Partialsummen gilt:
$s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n+1} + a_{2n} \geq 0$ wegen des monotonen Fallens. Also gilt $0 \leq s_1 \leq s_3 \leq \ldots$. Analog erhalten wir $a_0 = s_0 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_{2n} \geq \ldots$. Wegen $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \geq 0$ ist $s_{2n-1} \geq a_0$ für alle n. Somit ist (s_{2n-1}) eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Folge, die nach 3.7 konvergiert, etwa gegen s'. Ebenso konvergiert (s_{2n}) als monoton fallende, nach unten beschränkte Folge, etwa gegen s.

Nun ist $s - s' = \lim s_{2n} - \lim s_{2n-1} = \lim(s_{2n} - s_{2n-1}) = \lim a_{2n} = 0$, also ist $s = s'$. Also existiert N so, dass für alle $n \geq N$ $\quad |s_{2n} - s| < \varepsilon$ gilt, also $\lim s_n = s$.

(x) In Cauchy-vollständigen Körpern impliziert die absolute Konvergenz einer Reihe ihre Konvergenz .

Denn: Wegen der Dreiecksungleichung gilt $|\sum\limits_{n}^{m} a_\nu| \leq \sum\limits_{n}^{m} |a_\nu|$.

[7] Beweis F. Vieta 1593. Bereits Archimedes summierte die geometrische Reihe für q = 1/4 (Quadratura parabolae, sec. 23).
[8] In einem Brief an Joh. Bernoulli vom 25. 10. 1713

(xi) **Majorantenkriterium**: Sei $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ konvergent. Wenn $|a_\nu| \leq b_\nu$ für alle $\nu \geq N$, so ist $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ absolut konvergent. Wenn die Prämisse für alle ν gilt, so gilt darüber hinaus $|\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} a_\nu| \leq \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu| \leq \sum\limits_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$.
Denn: Die Aussage folgt aus 3.5 (v). N bedeute hier wie in (x) eine beliebige Konstante aus $\mathbb{N}$.

(xii) **Quotientenkriterium** in Körpern K mit Absolutbetrag $|\quad| : K \to \overline{K}$, $\overline{K}$ archimedisch: Sei $a_\nu \neq 0$ für alle $\nu \geq N$. Wenn q mit $0 < q < 1$ so existiert, dass $|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}| \leq q$ für alle $\nu \geq N$ gilt, so ist $\sum a_\nu$ absolut konvergent (im Falle von ≥ 1 dagegen divergent).
Denn: Für $n \geq N$ gelte $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$ mit $0 < q < 1$, also $|a_{N+\nu}| \leq q^\nu |a_N|$ für $\nu = 1, 2, \ldots$. Daher ist $|a_N| \sum q^\nu$ eine Majorante für $\sum\limits_{\nu=N}^{\infty} |a_\nu|$. Also ist $\sum a_\nu$ absolut konvergent. Gilt dagegen für $n \geq N$ $\;|a_{n+1}| \geq |a_n| \neq 0$, so ist $|a_N| \leq |a_{N+1}| \leq \ldots$, also **nicht** $\lim a_n = 0$. Mithin ist $\sum a_\nu$ divergent.

(xiii) **Achtung:** Das Quotientenkriterium macht nicht etwa eine positive Konvergenzaussage für den Fall $|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}| < 1$! Z.B. ist die harmonische Reihe divergent, aber es ist sehr wohl $|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}| = \frac{\nu}{\nu+1} < 1$ für alle ν.
Achtung: Das Quotientenkriterium ist nur hinreichend! Z.B. ist $\sum \frac{1}{\nu^2}$ konvergent (3.8 (ii)). Aber da $\frac{\nu^2}{(\nu+1)^2} \to 1$ geht, existiert kein $q < 1$ mit $|a_{n+1}| \leq q|a_n|$.

(xiv) Wir betrachten die Reihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}$, $z \in \mathbb{C}$. Für $z = 0$ definieren wir die Summe zu 1 (das steht auch in Einklang mit dem Resultat von 3.12(ii)). Für $z \neq 0$ liefert das Quotientenkriterium $|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}| = \frac{|z|^{\nu+1}\nu!}{(\nu+1)!|z|^\nu} = \frac{|z|}{\nu+1}$. Also ist für $\nu + 1 > 2|z|$ $\quad |\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}| \leq q = \frac{1}{2} < 1$. Mithin ist die vorgelegte Reihe absolut konvergent.

Die Reihe definiert also auf $\mathbb{C}$ eine Funktion $\exp z$, die sogenannte **Exponentialfunktion**.

Wir wissen nach dem Leibnizkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu+1} \frac{1}{\nu}$ konvergiert. Sei $s \in \mathbb{R}$ der Limes dieser Reihe.

Wegen $s = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{>0} \ldots$ ist $s > 0$.

Nun bilden wir die Summe der folgenden beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rcllllllllll} s & = & 1 & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & +\frac{1}{5} & -\frac{1}{6} & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{8} & +- & \ldots \quad , \\ \frac{1}{2}s & = & & \frac{1}{2} & & -\frac{1}{4} & & +\frac{1}{6} & & -\frac{1}{8} & +- & \ldots \quad , \\ also & & & & & & & & & & & \\ \frac{3}{2}s & = & 1 & & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{5} & & +\frac{1}{7} & -\frac{1}{4} & +- & \ldots \quad . \end{array}$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung ist aber „nur“ eine Umordnung der ursprünglichen Reihe (die Reihenfolge der Summation ist verändert). Die Annahme, ein Umordnen einer konvergenten Reihe würde den Reihenwert nicht ändern, ergäbe in diesem Fall $\frac{3}{2}s = s$, also $s = 0$, und damit einen Widerspruch! (Also **keine** Kommutativität der Addition bei unendlich vielen Summanden!)

Der folgende Satz zeigt, dass das Umordnen einer Reihe bei Vorliegen absoluter Konvergenz jedoch zulässig ist:

3.11 Satz (Umordnungssatz und Großes Distributivgesetz) :

Es seien $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu = s$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu = t$ absolut konvergent. Dann liefern die a_ν (bzw. die b_ν) dieselbe Summe, wenn sie in anderer Reihenfolge summiert werden. Man sagt: Die Reihe $\sum a_\nu$ kann **umgeordnet** werden, oder: die Folge (a_ν) (bzw. (b_ν)) ist **summierbar** mit der Summe s (bzw. t). Die Familie $\{a_\nu b_\mu\}_{(\nu,\mu)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ist dann ebenfalls summierbar. Insbesondere ist das **Cauchy-Produkt** $\sum\limits_{\lambda=1}^{\infty} c_\lambda$ mit $c_\lambda := \sum\limits_{\mu=1}^{\lambda} a_{\lambda-\mu} b_\mu$ absolut konvergent und hat die Summe st.

3.12 Eigenschaften der Exponentialfunktion :

(i) Es ist $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$.
Denn: $(\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{a^\nu}{\nu!})(\sum\limits_{\mu=0}^{\infty} \frac{b^\mu}{\mu!}) = \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty}\sum\limits_{\kappa=0}^{\lambda} \frac{a^{\lambda-\kappa}}{(\lambda-\kappa)!}\frac{b^\kappa}{\kappa!} = \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(a+b)^\lambda}{\lambda!}$

(ii) $\exp(0) = 1$
Denn: $\exp(z)\exp(0) = \exp(z)$ impliziert die Behauptung.

(iii) $\exp(-z) = (\exp(z))^{-1}$
Denn: Es gilt $\exp(z)\exp(-z) = \exp(0) = 1$.

(iv) $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Denn: Für $x \geq 0$ gilt $\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots \geq 1 > 0$. Für $x < 0$ ist $\exp(-x) = \exp(x)^{-1} > 0$.

(v) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp n = e^n$.
Denn: Nach Definition von e gilt $\exp 1 = e$ und der Rest der Behauptung folgt durch vollständige Induktion.

(vi) Es gilt $\exp a = e^a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$
Denn: Die Aussage folgt aus (iii) und (v)

(vii) Wir setzen nach $\mathbb{Q}$ fort: Da $(\exp \frac{1}{n})^n = \exp(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n})$ (mit n Summanden in der Klammer) $= \exp 1 = e$ ist, existiert $\sqrt[n]{e} \in \mathbb{R}$, und es ist $\exp \frac{1}{n} = e^{\frac{1}{n}}$. Daraus folgt $\exp q = e^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

3.13 Definition : Seien K ein angeordneter Körper und $a, b \in K$.

(i) $[a, b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$ heißt ein **abgeschlossenes Intervall** in K.

(ii) $]a, b[:= \{x \in K : a < x < b\}$ heißt ein **offenes Intervall** in K.

(iii) $]a, b]$ bzw. $[a, b[:= \{x \in K : a < x \leq b\}$ bzw. $\{x \in K : a \leq x < b\}$ heißt ein **halboffenes Intervall** in K.

3.14 Satz : (ohne Beweis) Sei K ein Körper. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) K ist angeordnet und vollständig (Eigenschaft von 3.3).

(ii) K ist archimedisch angeordnet und Cauchy-vollständig.

(iii) Jede beschränkte monotone K-Folge konvergiert in K (Eigenschaft von 3.7).

(iv) K ist archimedisch angeordnet und jede geschachtelte Folge abgeschlossener Intervalle von K hat einen nichtleeren Durchschnitt (sog. **Axiom der Intervallschachtelung**).

3.15 Bemerkungen :

(i) Der vorige Satz kennzeichnet abstrakt den Körper der reellen Zahlen.

(ii) Eine Folge geschachtelter, gegen Länge 0 gehender Intervalle definiert genau einen Punkt von $\mathbb{R}$.

3.16 Die b-adische Entwicklung reeller Zahlen zur Basis b :
Sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$.

I Für ein $n \in \mathbb{N}$ liefert der Divisionsalgorithmus
$n = q_0 = q_1 b + r_0 \qquad 0 \leq r_0 < b \qquad r_0$: kleinster Rest $\mod b$
$q_1 = q_2 b + r_1 \qquad 0 \leq r_1 < b \qquad r_1$: kleinster Rest $\mod b^2$
$\dots$
$q_{k-1} = q_k b + r_{k-1} \qquad 0 \leq r_{k-1} < b \qquad r_{k-1}$: kleinster Rest $\mod b^k$
$q_k = 0 \cdot b + r_k \qquad 0 \leq r_k < b$
Einsetzen von unten nach oben liefert:

$$n = r_k b^k + r_{k-1} b^{k-1} + \ldots + r_0 \quad .$$

Wir schreiben $n = \begin{pmatrix} r_k & r_{k-1} & \dots & r_0 \end{pmatrix}_b$ und nennen das die **b-adische Darstellung** oder die **b-al-Entwicklung** von n.

Zur Berechnung von $n = \sum_{\nu=0}^{k} r_\nu b^\nu$ benutzen wir das sog. **Horner-Schema**: Von $\nu = k$ bis $\nu = 1$ berechnen wir

$$q_{\nu-1} = q_\nu b + r_{\nu-1} \quad ,$$

startend mit $q_k = r_k$.
Das Horner-Schema benötigt k Additionen und k Multiplikationen.
Das ist günstiger als unorganisiertes Ausrechnen der Summe. Sonst benötigt man nämlich k Additionen und $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$ Multiplikationen.
Das Horner-Schema sollte auch für die effiziente Berechnung von exp(x) eingesetzt werden (numerische Ermittlung durch Abbruch der Reihe nach dem k-ten Glied).

II Entwicklung eines $r \in [0,1[\quad (r \in \mathbb{R})$.

Idee: Teile $[0,1[$ in b gleiche Teile. Nun wähle den Teil, der r enthält. Teile dieses Intervall wiederum in b gleiche Teile etc. So entsteht eine Intervallschachtelung: $[0,1[= \dot{\bigcup\limits_{i=0}^{b-1}} [0 + \dfrac{i}{b}, 0 + \dfrac{i+1}{b}[$

Wenn $r \in [0 + \frac{k_1}{b}, 0 + \frac{k_1+1}{b}[$, setze $r_{-1} := k_1$ (1. Nachkommastelle der b-adischen Entwicklung) und bilde die Partition

$[0 + \frac{r_{-1}}{b}, 0 + \frac{r_{-1}+1}{b}[= \bigcup\limits_{i=0}^{b-1} [\frac{r_{-1}}{b} + \frac{i}{b^2}, \frac{r_{-1}}{b} + \frac{i+1}{b^2}[\quad .$

Wenn $r \in [\frac{r_{-1}}{b} + \frac{k_2}{b^2}, \frac{r_{-1}}{b} + \frac{k_2+1}{b^2}[$, setze $r_{-2} := k_2$ usw.
$[\frac{r_{-1}}{b}, \frac{r_{-1}+1}{b}[\ , [\frac{r_{-1}}{b} + \frac{r_{-2}}{b^2}, \frac{r_{-1}}{b} + \frac{r_{-2}+1}{b^2}[, \ldots$ liefert die Intervallschachtelung. Die Länge der Intervalle geht gegen 0. Also $r = \frac{r_{-1}}{b} + \frac{r_{-2}}{b^2} + \ldots = \begin{pmatrix} . & r_{-1} & r_{-2} & \ldots \end{pmatrix}_b$ (b-adische Darstellung).

III Mit I und II hat man also die Entwicklung für alle $r \in \mathbb{R}$: r = ganze Zahl + Element aus $[0, 1[$.

Achtung: Die b-adische Darstellung ist **nicht** eindeutig. Z.B. $(.099\ldots)_{10} = (.100\ldots)_{10}$, $(.011\ldots)_2 = (.100\ldots)_2$.