Kapitel 4

Vektorräume

4.1 Definitionen : Sei K ein Körper und V eine additiv geschriebene abelsche Gruppe mit einer Multiplikation $K \times V \to V$, die also jedem Paar (λ, x) mit $\lambda \in K$ und $x \in V$ eindeutig ein Element $\lambda x \in V$ zuordnet. V heißt ein **Vektorraum** (oder **linearer Raum**) über K, wenn darüber hinaus gelten:

(i) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \quad ,$

(ii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad ,$

(iii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \quad ,$

(iv) $1x = x$ für alle $\lambda, \mu \in K$ und für alle $x, y \in V \quad .$

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, die von K **Skalare**. Das neutrale Element der Gruppe $(V, +)$ heißt der **Nullvektor**. Die beiden Operationen des Vektorraumes, nämlich die Addition und Multiplikation mit einem Skalar, heißen die **linearen Operationen**. $U \subset V$ heißt ein **Untervektorraum** oder **linearer Teilraum** von V, geschrieben $U < V$, wenn U bezüglich der von V induzierten Struktur wieder ein K-Vektorraum ist.

4.2 Bemerkungen :

(i) Die Addition in K und V werden mit dem gleichen Zeichen $+$ geschrieben. Wir schreiben für $(\lambda x) + y$ einfacher $\lambda x + y$.

> **Slogan:** Punktrechnung geht vor Strichrechnung.

(ii) Wenn K ein Körper ist, so ist $V := K$ ein K-Vektorraum. Wenn K_1 ein Teilkörper des Körpers K_2 ist, so ist K_2 ein K_1-Vektorraum. Z.B. ist $\mathbb{C}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(iii) Das n-fache Cartesische Produkt $V := K^n$ eines Körpers K wird ein K-Vektorraum, wenn Addition und Multiplikation mit einem Skalar komponentenweise über die Operationen von K definiert werden.

(iv) Ein Rechteckschema $(\alpha_{ij}) := \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$ mit $\alpha_{ij} \in K$ für alle $i = 1, \dots, m$ und für alle $j = 1, \dots, n$ heißt eine $m \times n$-**Matrix** mit **Einträgen** (**Koeffizienten**) aus K. Die Menge $M_{m,n}(K)$ aller $m \times n$-Matrizen über K wird vermittels $(\alpha_{ij})+(\beta_{ij}) := (\alpha_{ij}+\beta_{ij})$ und $\lambda(\alpha_{ij}) := (\lambda\alpha_{ij})$ ein K-Vektorraum.

(v) Sei K ein Körper und sei M eine Menge. $K^M := \{f : f : M \to K\}$ wird ein K-Vektorraum, wenn die linearen Operationen folgendermaßen definiert werden: $(f + g)(m) := f(m) + g(m)$ sowie $(\lambda f)(m) := \lambda f(m)$ für alle $f, g \in K^M$, für alle $\lambda \in K$ und für alle $m \in M$. Der Spezialfall $M = \{1, 2, \dots, n\}$ liefert das Cartesische Produkt K^n von (iii). Der Spezialfall $M = \mathbb{N}$ liefert den Vektorraum der Folgen mit Elementen aus K.

(vi) Für alle $\lambda \in K$ und $x \in V$ gelten:

$$\lambda\vec{0} = \vec{0}\ , \quad 0x = \vec{0}\ , \quad (\lambda x = \vec{0} \to \lambda = 0 \lor x = \vec{0}) \quad .$$

Denn: Da $\lambda\vec{0} = \lambda(\vec{0}+\vec{0}) = \lambda\vec{0}+\lambda\vec{0}$ gilt, ist $\lambda\vec{0} = \vec{0}$. Analog wird $0x = \vec{0}$ bewiesen. Für $\lambda x = \vec{0}$ und $\lambda \neq 0$ gilt $x = 1x = \lambda^{-1}\lambda x = \lambda^{-1}\vec{0} = \vec{0}$.

(vii) Im K-Vektorraum V gelten: $(-1)x = -x$, $(-\lambda)x = -\lambda x = \lambda(-x)$ für alle $\lambda \in K$ und für alle $x \in V$.
Denn: Da $\vec{0} = (1 - 1)x = 1x + (-1)x = x + (-1)x$ gilt, ist nach 2.2 (iii) $(-1)x = -x$.

(viii) Es seien V ein K-Vektorraum und $\emptyset \neq U \subset V$. Dann gilt: $U < V$ genau dann, wenn U bezüglich der linearen Operationen von V abgeschlossen ist.
Denn: Nicht unmittelbar klar ist höchstens die wenn-Richtung. Sei also $U \neq \emptyset$ abgeschlossen bezüglich der Addition und der Skalar-Multiplikation von V. Sei $u \in U$. Dann ist $0u = \vec{0} \in U$ und $(-1)u = -u \in U$, also ist U eine additive Untergruppe von V. Das Erfülltsein der übrigen Vektorraumaxiome „erbt“ U von V.

(ix) Der Durchschnitt von Unterräumen eines K-Vektorraumes ist wieder ein K-Vektorraum.
In jedem Vektorraum ist $\{0\}$ der kleinste Unterraum, nämlich der Durchschnitt aller linearen Teilräume.

Die Lineare und Multilineare Algebra – sogar etwa in der Art, wie wir sie heute darstellen – wurden nahezu im Alleingang von **einem** Mann geschaffen, von Hermann Günther Graßmann (1809–1877). Graßmann war Gymnasiallehrer in Stettin. Zeit seines Lebens blieb ihm die Anerkennung seiner mathematischen Arbeit verwehrt. Fast 100 Jahre dauerte es, bevor seine Leistung von der Fachwelt voll gewürdigt werden konnte.

In seiner „Ausdehnungslehre" führte Graßmann 1844, also noch bevor das Galoissche Werk durch Liouville veröffentlicht wurde, den abstrakten Gruppen-, Ring- und Vektorraumbegriff ein.[1] Graßmanns Leistung ist umso höher einzuschätzen, als die Sprache der Mengenlehre noch nicht zur Verfügung stand und seine berühmten Zeitgenossen Hamliton und Cayley allenfalls mit n-Tupeln reeller Zahlen arbeiteten. Auch die erste Verwendung von Vektoren in der euklidischen Ebene oder im 3-dimensionalen euklidischen Raum durch Möbius (1827), Gauß (1831) und Bellavitis (1832), die aus der Unzufriedenheit über die zunehmende Kompliziertheit der Koordinatenmethode herrührte, war Graßmann bei Abfassung der Ausdehnungslehre wahrscheinlich unbekannt.[2]

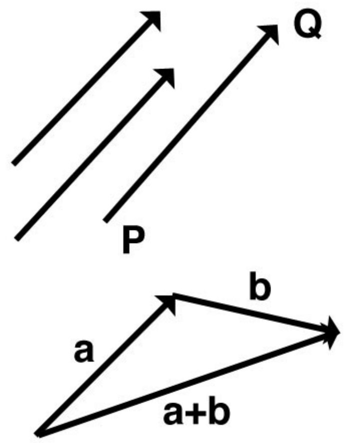
[1]Allerdings verwandte Graßmann nicht unsere heutigen Bezeichnungen. Abstrakte Gruppe und Ring faßte er unter der Bezeichnung „allgemeine Formenlehre" zusammen (§§1-12). Vektoren heißen bei ihm "Ausdehnungsgrößen". Vektorräume heißen „Gebiete"oder „Systeme".

[2]Siehe auch J. Dieudonne. The Tragedy of Grassmann, Lin. and Mult. Algebra 8 (1979), pp. 1-14 sowie D. Fearnley-Sander, Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra, Amer. Math. Monthly 86 (1979), 809-817.

Bei Graßmann sind das konsequent strukturelle Denken und das streng formalistische Vorgehen, die Grundbegriffe implizit durch Festlegung der Beziehungen zwischen ihnen zu definieren, wie es sich erst mit David Hilbert (1862–1943) ab der Jahrhundertwende durchsetzte, bereits voll entwickelt.[3]

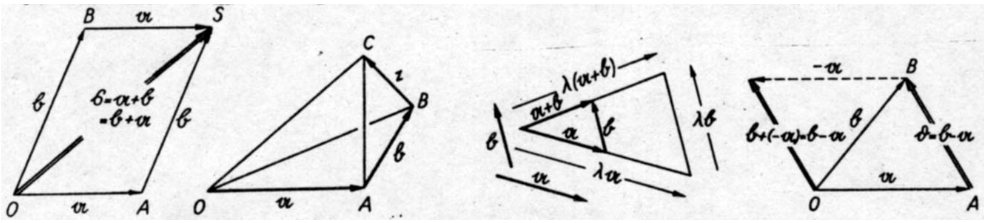
Es wird Ihnen aufgefallen sein, daß wir bisher diejenigen „Vektoren“, die Ihnen im Physik-Unterricht des Gymnasiums in Gestalt von Pfeilen – z.B. im Parallelogramm der Kräfte – begegnet sind, noch gar nicht erwähnt haben. Das liegt an einer methodischen Schwierigkeit: Wir können den 3-dimensionalen euklidischen Raum noch nicht exakt definieren, da wir noch keinen Längenbegriff haben. Dennoch sind diese „Vektoren“ zur anschaulichen Unterstützung der Theorie der Vektorräume sehr wichtig. Wir stellen uns daher einfach auf den Standpunkt, der 3-dimensionale euklidische Raum E^3 sei gegeben.

Dann definieren wir einen Vektor im E^3 als die Menge aller zu einem festen orientierten Punktepaar (:$\leftrightarrow$ Pfeil) des E^3 parallelen Pfeile gleicher Länge. Ein Vektor ist also jeweils eine Äquivalenzklasse von Pfeilen.
Wir definieren die Addition zweier Klassen über die Addition zweier geeigneter Repräsentanten so, wie wir sie vom Parallelogramm der Kräfte her kennen (siehe nebenstehende Abbildung). Der Nullvektor wird durch ein zusammenfallendes Punktepaar ($P = Q$) repräsentiert. Für $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ und einen Vektor a sei λa die Klasse der Pfeile mit Richtung von a und der λ-fachen Länge wie die der Pfeile von a. $-a$ sei durch die Pfeile gleicher Länge aber entgegengesetzter Richtung wie a repräsentiert.



[3] „Der rein wissenschaftliche Weg ... ist, daß wir ... von den Begriffen aus, welche dieser Wissenschaft zugrundeliegen, alles Einzelne entwickeln. Indem ich bei der Ableitung der Wahrheiten, welche den Inhalt dieser Wissenschaft (erg.: der Ausdehnungslehre) bilden, jedesmal den abstrakten Begriff zugrundlege, ohne mich dabei auf irgendeine in der Geometrie bewiesene Wahrheit zu stützen, so erhalte ich die Wiessenschaft ihrem Inhalte nach gänzlich rein und unabhängig von der Geometrie.“ Graßmann. Die lineale Ausdehnungslehre. Leipzig 1844, §13.

Dieses geometrische Modell kann rechnerisch als $\mathbb{R}^3$ (oder, wenn wir in der Ebene bleiben, sogar als $\mathbb{R}^2$) behandelt werden, indem ein Cartesisches Koordinatensystem eingeführt wird. In der Technik werden diese Vektoren oft **freie Vektoren** genannt, da sie ja „frei“ parallel-verschoben werden können. Ein Vektor ist doch eine Klasse zueinander paralleler Vektoren. (Begriffsbildung im Kontrast z.B. zu sog. **linienflüchtigen Vektoren**, die nur längs einer Geraden verschoben werden dürfen!).



Veranschaulichung der Kommutativität und Assoziativität der Addition sowie der Distributivität und der Subtraktion im euklidischen Vektorraum

4.3 Definitionen : Es seien V ein K-Vektorraum und $\emptyset \neq M \subset V$. Der Durchschnitt aller M enthaltender Unterräume von V heißt die **lineare Hülle** (oder das **lineare Erzeugnis**) von M oder der von M **erzeugte** (**aufgespannte**) Unterraum, geschrieben $\langle M \rangle$. M heißt dann ein **Erzeugendensystem** für $\langle M \rangle$.

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$. Ein Ausdruck der Gestalt $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ heißt eine **Linearkombination** der Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Unter einer Linearkombination einer Menge M mit $\emptyset \neq M \subset V$ wird eine Linearkombination aus endlich vielen Vektoren von M verstanden.

Sei $\mathcal{U}$ eine Menge von Unterräumen von V. $\sum\limits_{U \in \mathcal{U}} U := \langle \bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U \rangle$ heißt die **Summe** der Unterräume von $\mathcal{U}$.

4.4 Bemerkungen :

(i) $\langle M \rangle$ ist der kleinste M enthaltende Unterraum von V.

(ii) $\langle M \rangle$ ist die Menge der Linearkombinationen, die aus Vektoren von M gebildet werden können.
Denn: Das ist klar wegen 4.2 (viii).

(iii) $\sum\limits_{U \in \mathcal{U}} U$ besteht aus genau den Vektoren, die sich als endliche Summe von Vektoren aus paarweise verschiedenen Elementen von $\mathcal{U}$ darstellen lassen.

4.5 Definitionen :

(i) $\sum\limits_{i=1}^{n} 0x_i = 0$ heißt eine **triviale Darstellung der Null**.

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0$ heißt eine **nichttriviale Darstellung der Null**, wenn nicht alle λ_i gleich Null sind und $x_1, x_2, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind.

(iii) Die Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eines K-Vektorraumes V heißen **linear unabhängig**, wenn die Null durch sie nur trivial darstellbar ist, andernfalls **linear abhängig**.

(iv) Sei $M \subset V$. M heißt **linear unabhängig**, wenn je endlich viele Vektoren aus M linear unabhängig sind, und andernfalls **linear abhängig**.

(v) Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V heißt eine **Basis** von V.

Übung: Machen Sie sich am oben eingeführten Beispiel des E^2 anschaulich klar, daß dort je drei Pfeilklassen stets linear abhängig sind, aber zwei (nichttriviale) Pfeilklassen verschiedener Richtung eine Basis bilden.

4.6 Bemerkungen :

(i) Wenn M linear unabhängig ist, so gilt $\forall N \subset M$: N ist linear unabhängig.

(ii) Wenn M linear abhängig ist, so gilt $\forall N \supset M$: N ist linear abhängig.

(iii) Wenn M Teilmenge eines Vektorraumes, und wenn $\vec{0} \in M$ ist, so ist M linear abhängig.

(iv) Sei V K-Vektorraum und sei $x \in V$. Dann gilt: $\{x\}$ linear unabhängig $\leftrightarrow x \neq 0$.

(v) Sei $|M| \geq 2$. Dann ist M genau dann linear abhängig, wenn es paarweise verschiedene $y, x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ gibt mit $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i (n \geq 1, \lambda_i \in K)$.

(vi) $\emptyset$ ist Basis von $\{0\}$.

(vii) $\{e_1 := (1, 0, \ldots, 0), e_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n := (0, 0, \ldots, 0, 1)\}$ ist eine Basis von K^n, die sog. **kanonische Basis**. $e_1, e_2, \ldots, e_n$ heißen die **Standardbasisvektoren**.
Denn: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} (0, \ldots, 0, \lambda_i, 0, \ldots, 0) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n)$ ist genau dann gleich 0, wenn alle λ_i verschwinden. Also ist $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ linear unabhängig. Die Gleichung zeigt auch, daß die Menge ein Erzeugendensystem für K^n ist.

(viii) $\{1, X, X^2, \ldots\}$ ist eine Basis des K-Vektorraums $K[X]$.

Der folgende Satz gibt nützliche äquivalente Kennzeichnungen des Begriffs „Basis“:

4.7 Satz : Sei $V \neq \{0\}$ K-Vektorraum und sei $M \subset V$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) M ist Basis von V.

(ii) M ist maximale linear unabhängige Teilmenge von V.

(iii) Jedes $v \in V \setminus \{0\}$ läßt sich eindeutig als Linearkombination von paarweise verschiedenen Elementen aus M darstellen: $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ ($\lambda_i \in K$, $m_i \in M$).

(iv) M ist minimales Erzeugendensystem von V.

Beweis: Der Beweis erfolgt durch einen sogenannten „Ringschluß“. Wir zeigen nämlich (i) $\rightarrow$ (ii), (ii) $\rightarrow$ (iii), (iii) $\rightarrow$ (iv) und (iv) $\rightarrow$ (i).

Sei also (i) vorausgesetzt, und sei $v \in V \setminus M$. Dann ist $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ mit paarweise verschiedenen $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Also ist $M \cup \{v\}$ linear abhängig.
Sei (ii) vorausgesetzt. Zunächst läßt sich jedes $v \in M$ als Linearkombination von Elementen aus M darstellen (nämlich als $v = 1v$). Das gilt aber auch für jedes $v \in V \setminus M$; denn, da $M \cup \{v\}$ nach Voraussetzung linear abhängig

ist, gibt es eine nichttriviale Darstellung der Null: $0 = \lambda v + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$ mit $m_i \in M$ und $\lambda \neq 0$. Also $v = \sum_{i=1}^{n} -(\lambda^{-1}\lambda_i)m_i$. Wenn v zwei Darstellungen $\sum_{m_i \in M} \lambda_i m_i = \sum_{m_i \in M} \lambda_i^* m_i$ (fast alle λ_i bzw. λ_i^* gleich 0) hätte, dann wäre $\sum(\lambda_i - \lambda_i^*)m_i = 0$, und wegen der linearen Unabhängigkeit wäre $\lambda_i = \lambda_i^*$ für alle i.
Wenn (iii) vorausgesetzt ist, so ist $V = \langle M \rangle$. Angenommen, es gäbe $m \in M$ mit $V = \langle M \setminus \{m\} \rangle$, so wäre $m = 1m = \sum \lambda_i m_i$ mit $m_i \in M \setminus \{m\}$. Also hätte m zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombination der Elemente von M.
Sei schließlich (iv) vorausgesetzt. Unter der Annahme der linearen Abhängigkeit von M existierte eine Darstellung $0 = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i m_i$ mit $m_i \in M$ und etwa $\lambda_0 \neq 0$. Mithin wäre $m_0 = \sum_{i=1}^{n} -(\lambda_0^{-1}\lambda_i)m_i$, also $V = \langle M \setminus \{m_0\} \rangle$ im Widerspruch zur Minimalität von M.

4.8 Satz (Austauschsatz) : Sei V ein K-Vektorraum mit endlichem Erzeugendensystem $\{u_1, \dots, u_n\}$ und sei M eine linear unabhängige Menge in V. Dann ist $M = \{v_1, \dots, v_m\}$ mit $m \leq n$, und bei geeigneter Wahl der Indizes der u_i ist auch $\{v_1, \dots, v_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ ein Erzeugendensystem von V.

Der Satz heißt Austauschsatz, weil m geeignete Elemente von $\{u_1, \dots, u_n\}$ gegen $v_1, \dots, v_m$ ausgetauscht werden können, ohne die Eigenschaft, Erzeugendensystem zu sein zu zerstören.[4] Wir illustrieren den Satz noch einmal: Nach evtl. Umnumerieren: $V = \langle \underbrace{u_1, \dots, u_m}_{v_1,\dots,v_m linear unabhängig}, u_{m+1}, \dots, u_n \rangle \longrightarrow V = \langle v_1, \dots, v_m, u_{m+1}, \dots, u_n \rangle$.

[4]Der Austauschsatz wird oft nach E. Steinitz benannt, weil er in dessen Arbeit „Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme“, J. reine und angew. Math. 143 (1913), 128-175, vorkommt. Jedoch steht der Satz bereits auf S. 10 der Graßmannschen Ausdehnungslehre von 1862. Graßmann hatte nach dem Ausbleiben einer Resonanz auf seine „lineale Ausdehnungslehre“ von 1844 im Jahre 1862 einen zweiten Anlauf genommen. Auf eigene Kosten veröffentlichte er eine neue Ausdehnungslehre, in der er davon absieht, Vektorraum und äußere Algebra intrinsisch zu definieren. Er definiert den Vektorraum nun als die Menge der Linearkombinationen von n „ursprünglichen Einheiten“ $e_1, \dots, e_n$, „welche in keiner Zahlbeziehung zueinander stehen“. Aber auch dieser Ausdehnungslehre war keine bessere Aufnahme beschieden als der ersten.

Beweis des Austauschsatzes: Seien $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig in V. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion nach m. Für $m = 1$ ist $v_1 \neq 0$, also ist $v_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$ und bei geeigneter Numerierung $\lambda_1 \neq 0$. Mithin ist $u_1 = \sum -\lambda_1^{-1} \lambda_i u_i + v_1$, und somit $V = \langle v_1, u_2, \ldots, u_n \rangle$.
Sei bereits $V = \langle v_1, \ldots, v_{m-1}, u_m, \ldots, u_n \rangle$ gezeigt.
Dann ist $v_m = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i v_i + \sum_{i=m}^{n} \mu_i u_i$. Wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_m$ verschwinden nicht alle μ_i, also etwa $\mu_m \neq 0$. Daher ist $u_m = \sum_{i=1}^{m-1} - \mu_m^{-1} \lambda_i v_i + \sum_{i=m+1}^{n} - \mu_m^{-1} \mu_i u_i + \mu_m^{-1} v_m$ und $V = \langle v_1, \ldots, v_m, u_{m+1}, \ldots, u_n \rangle$.
Damit ist auch $m \leq n$ gezeigt.

4.9 Folgerung : Es seien $\{u_1, \ldots, u_m\}$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basen des K-Vektorraumes V. Dann ist $m = n$. Wenn V eine endliche Basis besitzt, so besteht jede Basis von V aus gleichvielen Elementen. Die Anzahl der Elemente einer solchen Basis heißt die **Dimension** von V, geschrieben $\mathrm{Dim}_K V$. Es ist $\mathrm{Dim}_K \{0\} = 0$. Wenn V keine endliche Basis besitzt, so heißt V **unendlich-dimensional**.[5]

4.10 Beispiele :

(i) $\mathrm{Dim}_K K^n = n$

(ii) $\mathrm{Dim}_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

(iii) $\mathrm{Dim}_K K[x] = \aleph_0$

4.11 Bemerkung : Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine endliche Basis. Man verkürze das endliche Erzeugendensystem so lange, bis es ein minimales ist.

Übung: Nachstehend ein Faksimile vom Beweis des Austauschsatzes aus Graßmanns Ausdehnungslehre von 1862. Formulieren Sie alles in heutige Sprechweise um und machen Sie sich den Beweis klar.

[5] Auch im unendlich-dimensionalen Fall läßt sich die Dimension als Invariante des Vektorraumes V über die Kardinalzahl einer Basis von V definieren (siehe z.B. E. Hewitt, K. Stromberg: Real and Abstract Analysis. Berlin 1965, Theorem 4.58)

20. Wenn m Grössen $a_1, \cdots a_m$, die in keiner Zahlbeziehung zu einander stehen, aus n Grössen $b_1, \cdots b_n$, numerisch ableitbar ſind, ſo kann man stets zu den m Grössen $a_1, \cdots a_m$ noch (n-m) Grössen $a_{m+1}, \cdots a_n$ von der Art hinzufügen, dass ſich die Grössen $b_1, \cdots b_n$ auch aus $a_1 \cdots a_n$ numerisch ableiten lassen, und alſo das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch ist dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$; auch kann man jene (n-m) Grössen aus den Grössen $b_1 \cdots b_n$ ſelbst entnehmen.

Beweis. Nach der Annahme ist a_1 aus $b_1 \cdots b_n$ ableitbar. Von den Zahlen, durch welche dieſe Ableitung erfolgt, muss mindestens Eine von null verschieden ſein, weil ſonst a_1 ſelbst null wäre, alſo der Verein der m Grössen (nach 2) einer Zahlbeziehung unterläge.

Es ſei die zu b_1 gehörige Zahl von null verschieden, und dies wird man immer annehmen können, da man ja die Indices beliebig wählen kann. Dann ist nach 19 das aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch dem aus $a_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbaren. Man habe nun für irgend ein r, welches $< m$ ist, gefunden, dass das Gebiet der Grössen $b_1, b_2, \cdots b_n$ identisch ſei dem Gebiete der Grössen $a_1, a_2, \cdots a_r, b_{r+1}, \cdots b_n$, ſo wird nun, da nach der Hypotheſis a_{r+1} aus $b_1, b_2, \cdots b_n$ ableitbar ist, es auch (vermöge der Gebiets-Identität) aus $a_1, a_2, \cdots a_r, b_{r+1} \cdots b_n$ ableitbar ſein. In dem Ausdrucke dieſer Ableitung $a_{r+1} = \alpha_1 a_1 + \cdots \alpha_r a_r + \beta_{r+1} b_{r+1} + \cdots \beta_n b_n$ muss nothwendig einer der Koefficienten, die zu $b_{r+1}, \cdots b_n$ gehören, von null verschieden ſein, weil ſonst zwischen den Grössen $a_1 \cdots a_{r+1}$ eine Zahlbeziehung stattfände, gegen die Hypotheſis; es ſei dies etwa β_{r+1}, ſo ist, nach 19, das aus $a_1, \cdots a_r, b_{r+1} \cdots b_n$ ableitbare Gebiet identisch dem aus $a_1, \cdots a_{r+1}, b_{r+2} \cdots b_n$ ableitbaren; alſo auch dies letztere Gebiet identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$. Dieſen Schluss kann man alſo von $r = 1$ an verfolgen, bis $r = m$ wird; d. h. es wird dann das Gebiet $a_1 \cdots a_m b_{m+1} \cdots b_n$ identisch dem Gebiete $b_1 \cdots b_n$; und bezeichnet man dann die ſo übrig gebliebenen Grössen $b_{m+1}, \cdots b_n$ beziehlich mit $a_{m+1}, \cdots a_n$, ſo wird das Gebiet der Grössen $a_1 \cdots a_n$ identisch dem Gebiete der Grössen $b_1 \cdots b_n$.

4.12 Folgerungen :

(i) Sei $\operatorname{Dim} V = n$ und sei $B \subset V$, B linear unabhängig. Dann gilt: B ist genau dann eine Basis von V, wenn $|B| = n$ ist.

(ii) Sei $U < V$. Dann gilt $\operatorname{Dim} U \leq \operatorname{Dim} V$ und
$\operatorname{Dim} U = \operatorname{Dim} V \;\rightarrow\; U = V$.

4.13 Satz : Seien U_1 und U_2 endlich-dimensionale Unterräume eines K-Vektorraumes V. Dann gilt:

$$\operatorname{Dim} U_1 + \operatorname{Dim} U_2 = \operatorname{Dim}(U_1 + U_2) + \operatorname{Dim}(U_1 \cap U_2) \quad .$$[6]

Beweis: Sei $c_1, \ldots, c_r$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Wir verlängern sie zu einer Basis $c_1, \ldots, c_r, a_{r+1}, \ldots, a_m$ von U_1 bzw. $c_1, \ldots, c_r, b_{r+1}, \ldots, b_n$ von U_2. Es genügt zu zeigen, daß $c_1, \ldots, c_r, a_{r+1}, \ldots, a_m, b_{r+1}, \ldots, b_n$ Basis von $U_1 + U_2$ ist. Natürlich ist diese Menge ein Erzeugendensystem für $U_1 + U_2$. Sie ist aber auch linear unabhängig: Wenn nämlich $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i c_i + \sum\limits_{j=r+1}^{m} \mu_j a_j + \sum\limits_{k=r+1}^{n} \nu_k b_k = 0$ ist, so ist $\sum \lambda_i c_i + \sum \mu_j a_j = -\sum \nu_k b_k \in U_1 \cap U_2$, da offensichtlich die linke Seite Element von U_1 und die rechte Seite Element von U_2 ist. Da ein Element von $(U_1 \cap U_2) \setminus \{0\}$ aber eindeutig als Linearkombination der c_i allein darstellbar ist, zeigt die zweite Gleichung auch, daß $\mu_{r+1} = \ldots = \mu_m = 0$ und ebenso $\nu_{r+1} = \ldots = \nu_n = 0$ sowie $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$ sind, wenn man die Eigenschaft 4.7 (iii) für die oben gewählten drei Basen ausnutzt.

[6] Auch dieser Satz steht bei Graßmann (1862): Erster Abschnitt, Kap. 1, §1, Ziffer 25.