Kapitel 5

Normierte Räume, Kompaktheit, Stetigkeit

5.1 Definitionen : Sei K ein Körper mit Absolutbetrag $|\ | : K \to \mathbb{R}$. Ein K-Vektorraum V heißt ein **normierter Vektorraum**, wenn eine sogenannte **Norm** $||\ || : V \to \mathbb{R}$ existiert, die über folgende Eigenschaften definiert wird:

(i) $||x|| > 0$ für alle $x \in V \setminus \{0\}$, sog. **Definitheit**,

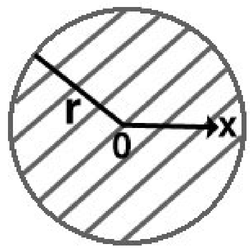
(ii) $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$ für alle $x \in V, \lambda \in K$, sog. **Homogenität**,

(iii) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ für alle $x, y \in V$, sog. **Subadditivität**.

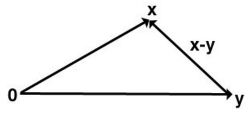
$K_r(a) := \{x \in V : ||x - a|| < r\}(r \in \mathbb{R}^+, a \in V)$ heißt die **offene Kugel** um a mit **Radius** r bzw. $\overline{K_r(a)} := \{x \in V : ||x - a|| \leq r\}$ die **abgeschlossene Kugel**.

5.2 Bemerkungen :

(i) Der Normbegriff ist für Vektoren analog zum Absolutbetrag für Körperelemente geschaffen worden. $||x||$ kann man als ein Maß für die Länge des Vektors x ansehen.
Nebenstehend zum Beispiel die „Kugel“ um den Ursprung in $\mathbb{C}$.Als Norm sei hier der Absolutbetrag gewählt.



$||x-y||$ ist im E^n ein Maß für den Abstand der „Punkte" x und y.

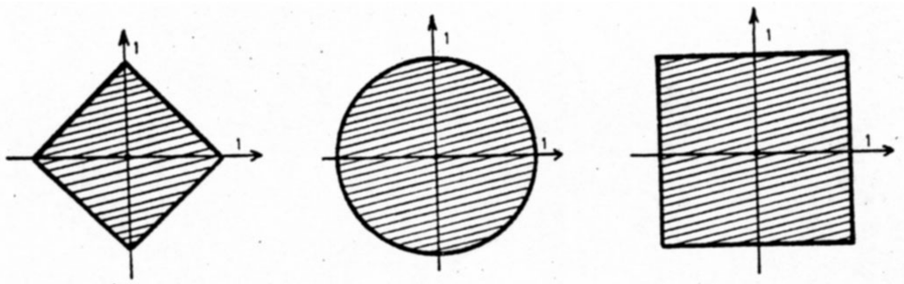


(ii) Sei K ein Körper mit Absolutbetrag. Beispiele für Normen auf K^n sind die l_p-**Norm** $||x||_p := (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^p)^{\frac{1}{p}}$, wenn $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ und $p \in \mathbb{N}$ ist. Der Spezialfall der l_1-Norm heißt auch **Betrags-Summen-Norm** oder **Manhattan-Norm** (Warum wohl?), derjenige der l_2-Norm heißt auch **euklidische** Norm $||x||_2 := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

$||x||_\infty := \sup\{|\xi_i| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ heißt die **Maximums-Norm** oder auch **Tschebyscheff-Norm**.

Überlege jeweils die Gültigkeit der Axiome (i) bis (iii).

Unten abgebildet sind die Einheitskugeln des $\mathbb{R}^2$ in der Betrags-Summen-Norm, in der euklidischen Norm bzw. in der Maximums-Norm.



(iii) Sei B der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller auf einer Menge M definierten, beschränkten reellwertigen Funktionen f. Dann definiert $||f|| := \sup_{x \in M} |f(x)|$ eine Norm auf B, die sogenannte **Supremums-Norm**.

(iv) Die Begriffe Limes, Cauchy-Folge, Konvergenz, Beschränktheit, Cauchy-Vollständigkeit etc. lassen sich nun auf normierte Vektorräume übertragen, indem zu den Definitionen 3.4 etc. analoge Setzungen erfolgen, wobei statt $|\ |$ nun $||\ ||$ geschrieben wird.

Cauchy-vollständige, normierte Vektorräume heißen **Banachräume**. Also wird eine Cauchy-Folge (a_n) in einem normierten Raum V etwa durch die Bedingung $\bigwedge\limits_{\epsilon>0} \bigvee\limits_{N\in\mathbb{N}} \bigwedge\limits_{m,n\geq N} ||a_n - a_m|| < \epsilon$ definiert.

5.3 Hilfssatz : Es seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p > 1$ und $(p-1)(q-1) = 1$. Dann gilt für nicht-negative reelle Zahlen a, b: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.
Beweis: Wenn eine der Zahlen a, b Null ist, so ist die Behauptung trivial. Seien also $a, b > 0$. Wir setzen $\alpha := p - 1$, $\beta := q - 1$. Ohne Einschränkung sei $a^\alpha \leq b$ angenommen.

Wenn nämlich $a^\alpha > b$ ist, so vertausche die Rollen von a, α mit denen von b, β. Denn wir haben dann $a = a^{\alpha\beta} > b^\beta$.

Daher ergibt sich für die Funktion $y = x^\alpha$ folgender rechts skizzierter Graph: Im Folgenden verwenden wir – späterem vorgreifend – elementare Kenntnisse aus der Integralrechnung, welche aber von der Schule her geläufig sein dürften.

Es gilt $\int_0^a x^\alpha dx = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} = \frac{a^p}{p}$ sowie $\int_0^b y^\beta dy = \frac{b^{\beta+1}}{\beta+1} = \frac{b^q}{q}$. Das sind aber die Flächeninhalte der beiden schraffierten Gebiete. Die behauptete Ungleichung folgt nun unmittelbar durch Vergleich mit der Fläche des Rechtecks $(0,0), (a,0), (a,b), (0,b)$.

5.4 Satz (Höldersche Ungleichung) : Es seien $p, q \in \mathbb{R}$ mit $p > 1$ und $(p-1)(q-1) = 1$. Dann gilt für endliche oder nichtendliche Zahlenfolgen (a_n), (b_n) nichtnegativer reeller Zahlen:

$$\sum a_n b_n \leq (\sum a_n^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_n^q)^{\frac{1}{q}}$$

Der Spezialfall $p = q = 2$ liefert die sog. **Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung**

$$(\sum a_n b_n)^2 \leq \sum a_n^2 \sum b_n^2 \quad .$$

Beweis: Es seien $\sum a_n^p$ und $\sum b_n^q > 0$.
Wir setzen $a_n^{'} := \frac{a_n}{(\sum_k a_k^p)^{\frac{1}{p}}}$ und $b_n^{'} := \frac{b_n}{(\sum_k b_k^q)^{\frac{1}{q}}}$. Dann gilt nach 5.3: $a_n^{'} b_n^{'} \leq \frac{a_n^{'p}}{p} + \frac{b_n^{'q}}{q}$. Also gilt $\sum a_n^{'} b_n^{'} \leq \frac{\sum a_n^{'p}}{p} + \frac{\sum b_n^{'q}}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und mithin $\sum a_n b_n \leq (\sum a_n^p)^{\frac{1}{p}} (\sum b_n^q)^{\frac{1}{q}}$.

5.5 Folgerung : Sei V ein normierter Vektorraum der Dimension n. Wenn $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$ für die Koordinatendarstellung von $x, y \in V$ bezüglich einer festgewählten Basis definiert wird, so gilt $\langle x, y\rangle \leq ||x||_p ||y||_q$, sofern p, q die Voraussetzung von Satz 5.4 erfüllen.

5.6 Satz (Minkowskische Ungleichung : Seien (a_n), (b_n) Folgen nichtnegativer reeller Zahlen und sei $p > 1$. Dann gilt $(\sum (a_n + b_n)^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum a_n^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum b_n^p)^{\frac{1}{p}}$.
Beweis: Nutze die Höldersche Ungleichung. „proof is straightforward“ (G. Bachman - L. Narici: Functional Analysis, chap. 8, p.112).

5.7 Definitionen :

(i) Eine Teilmenge M eines normierten Vektorraumes V heißt **offen**, wenn $\bigwedge_{x \in M} \bigvee_{r>0} K_r(x) \subset M$ gilt. Wir schreiben dann auch $M \Subset V$.

(ii) M heißt **abgeschlossen**, wenn $\mathcal{C}_V M$ offen ist. $\mathcal{C}$ steht für das **Komplement**.

(iii) Eine Teilmenge M heißt **kompakt**, wenn jede Überdeckung von M durch offene Teilmengen eine endliche Teilüberdeckung gestattet, d.h., wenn $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$, mit U_i offen, impliziert $\exists$ endliches $I_0 \subset I : M \subset \bigcup_{i \in I_0} U_i$.

5.8 Bemerkungen :

(i) Endliche Mengen sind kompakt.

(ii) $]0, 1[\subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

(iii) Wenn M kompakt ist, so ist M beschränkt.

(iv) Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.

(v) Kompakte Mengen weisen die Intervallschachtelungseigenschaft auf, d.h.: Wenn $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ eine Kette von nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen der kompakten Menge M ist, so existiert $p \in M$ mit $p \in \cap A_i$. Kompakte Mengen sind also Cauchy-vollständig.

(vi) Im Banachraum V abgeschlossene Mengen sind Cauchy-vollständig.

5.9 Satz (Heine-Borel) : In $\mathbb{R}^n$ und in $\mathbb{C}^n$ gilt für Teilmengen M:
M ist genau dann kompakt, wenn es beschränkt und abgeschlossen ist.

5.10 Definitionen : Sei V ein normierter Vektorraum, und sei $D \subset V$.

(i) $a \in V$ heißt ein **Berührpunkt** von D, wenn $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} K_\varepsilon(a) \cap D \neq \emptyset$ gilt.

(ii) Die Menge $\overline{D}$ aller Berührpunkte von D heißt der **Abschluß** von D oder die **abgeschlossene Hülle** von D.

(iii) Seien $V, || \, ||$ und $V', || \, ||'$ normierte Räume mit $D \subset V$, a Berührpunkt von D und $f : D \to V'$. $c \in V$ heißt **Limes** von $f(x)$ für $x \to a$, geschrieben $c = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, wenn $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta>0} \bigwedge\limits_{x \in D} (||x-a|| < \delta \to ||f(x)-c||' < \varepsilon)$ gilt.

(iv) Der Limes von Funktionswerten wird also nicht nur für eine Folge von Urbildern, die gegen einen Punkt des Definitionsbereiches konvergieren, definiert, sondern auch für eine Folge von Urbildern, die gegen einen Berührpunkt des Definitionsbereiches konvergieren.

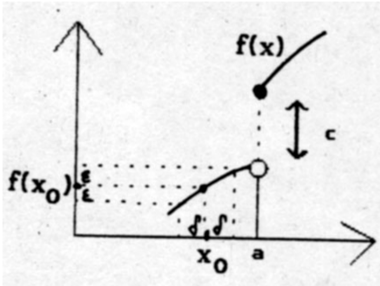
(v) Es seien $(V, || \, ||)$, $(V', || \, ||')$ normierte Räume. Eine Funktion $f : D \to V'$, $D \subset V$ heißt **stetig** in $a \in D$, wenn $\bigwedge\limits_{\varepsilon>0} \bigvee\limits_{\delta>0} \bigwedge\limits_{x \in D} (||x - a|| < \delta \to ||f(x) - f(a)||' < \varepsilon)$ gilt.

(vi) f heißt **stetig (schlechthin)** oder **stetig auf D** oder **global stetig**, wenn f in jedem Element von D stetig ist.

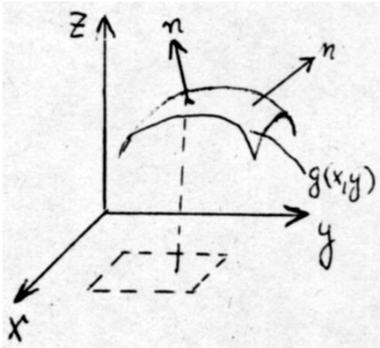
5.11 Bemerkungen :

(i) Die Wortwahl „stetig" deutet darauf, daß die Intention der Definition ist, Funktionen zu erfassen, deren Funktionswerte sich nicht „abrupt" ändern. Sei z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, und man gebe der unabhängigen Variablen x die Bedeutung der Zeit. Wenn man sich dann den Graphen von f kinematisch mit verstreichender Zeit entstanden denkt (so daß $f(x)$ also eine Raumkurve im $\mathbb{R}^3$ durchläuft), so bedeutet Stetigkeit, daß der Graph nicht „zerreißt". Für im Definitionsbereich hinreichend nahe beieinander liegende Punkte liegen die entsprechenden Bildpunkte nahe beieinander: $||x - x_0|| < \delta \to ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$.

(ii) Sei $V = V' = \mathbb{R}$ und sei $\|\ \| = \|\ \|' = \|\ \|_2 = |\ |$ der übliche Absolutbetrag von $\mathbb{R}$. Also $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ habe den nebenstehenden Graphen. Dann ist $f(x)$ stetig in x_0, aber nicht in a. Denn: Wenn wir ε so wählen, daß $0 < \varepsilon < c$ ist, so ist für $x < a$ **niemals** $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ möglich!



Unser Stetigkeitskonzept ist jedoch viel allgemeiner, als dieses spezielle Beispiel zeigt: Es erfaßt auch Situationen wie z.B. bei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, wobei $n = f(x,y) \in \mathbb{R}^3$ der Normaleneinheitsvektor an die Fläche $z = g(x,y)$ sei (siehe Skizze!).



(iii) Die durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ -1 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist nirgendwo stetig.
Denn: Es sei $\varepsilon = 1$ gewählt. Wenn f in x_0 stetig wäre, dann existierte $\delta > 0$ so, daß $|x - x_0| < \delta$ implizierte $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Wenn $x_0 \notin \mathbb{Q}$ ist, so läßt sich stets ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $|x - x_0| < \delta$ finden (Schreibe x_0 als unendlichen Dezimalbruch und breche ihn geeignet ab, um x zu erhalten. Je nach der Größe von δ wähle man die Dezimale, bis zu der x und x_0 übereinstimmen.), aber $|f(x) - f(x_0)| = 2$. Denselben Widerspruch erhält man im Falle $x_0 \in \mathbb{Q}$, da es nun ein $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gibt mit $|x - x_0| < \delta$ (z.B. durch Wahl von $x = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ für genügend großes $n \in \mathbb{N}$).

(iv) $f(x) = x^2$ ist auf $\mathbb{R}$ überall stetig ($n \in \mathbb{N}$).
Denn: $|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| = |x - x_0||x - x_0 + 2x_0| \leq |x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0|$
Wähle $\delta := min\{\frac{1}{2}\sqrt{2\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{4|x_0|}\}$. Wenn $|x - x_0| < \delta$ ist, so ist also $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

(v) Berührpunkte einer Menge D sind: alle Punkte von D und die sog. „Randpunkte" von D. **Randpunkte** von D sind dadurch gekennzeichnet, daß in jeder ε-Kugel um einen solchen Punkt sowohl Punkte aus D als auch solche aus $\complement D$ liegen. Also: $\overline{D} = D \cup \partial D$, $\partial D :=$ Rand von D.

(vi) Stetigkeit von x_0 bedeutet: $\bigwedge\limits_{K_\varepsilon(f(x_0))} \bigvee\limits_{K_\delta(x_0)} f(K_\delta(x_0) \cap D) \subset K_\varepsilon(f(x_0))$.

5.12 Satz : Es seien $(V, || \; ||)$, $(V', || \; ||')$ normierte Räume und $D \Subset V$, $f : D \to V'$. Dann gilt: f ist genau dann stetig, wenn für alle offenen $U' \subset V'$ das Urbild $f^{-1}(U')$ offen in V ist.

Slogan für globale Stetigkeit: Die Urbilder offener Mengen sind offen.

Beweis: Sei U' offen in V' und es sei $x_0 \in f^{-1}(U')$. Dann existiert ein $K_\varepsilon(f(x_0))$ in U'. Wenn f in x_0 stetig ist, so existiert zu ε ein $\delta > 0$ mit $f(K_\delta(x_0) \cap D) \subset K_\varepsilon(f(x_0)) \subset U'$. Also ist $K_\delta(x_0) \cap D \subset f^{-1}(U')$, und somit ist $f^{-1}(U')$ offen.
Seien umgekehrt die Urbilder offener Mengen offen. Seien $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Es ist $x_0 \in f^{-1}(K_\varepsilon(f(x_0)))$ und letzteres offen. Also existiert $K_\delta(x_0) \subset f^{-1}(K_\varepsilon(f(x_0)))$, also $f(K_\delta(x_0)) \subset K_\varepsilon(f(x_0))$. Also ist f in x_0 stetig.

5.13 Folgerung : Wenn $D \Subset V$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $a \in \mathbb{R}$ ist, so ist $\{x \in D : f(x) < a\}$ offen in D.
Denn: Es ist $\{x \in D : f(x) < a\} = f^{-1}(]-\infty, a[)$, also Urbild einer offenen Menge.

5.14 Satz : Es seien V, V', V'' normierte Räume, $D \subset V$, $D' \subset V'$, $f : D \to D'$, $g : D' \to V''$, f und g stetig in $a \in D$ bzw. in $f(a) \in D'$. Dann ist $g \circ f$ stetig in a.

5.15 Definition : Die Bezeichnungen seien wie in 5.10, und es sei $a \in \overline{D}$. Wenn für alle Folgen (x_ν) aus D mit $\lim x_\nu = a$ die Beziehung $\lim\limits_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = q$ gilt, so heißt $f(a) := q$ die **stetige Ergänzung** von f im Punkt a.

5.16 Bemerkungen :

(i) Seien $D \subset V$, $f : D \to V'$, V und V' normierte Räume sowie $a \in D$. Dann gilt: f ist genau dann stetig in a, wenn

$$\bigwedge_{(x_\nu)} (\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = a \to \lim_{\nu\to\infty} f(x_\nu) = f(a))$$

gilt.

(ii) Beispiel für eine stetige Ergänzung.

(iii) Wenn f, g in $a \in D$ stetige Abbildungen $D \to V'$ sind, so sind $f + g$, $f - g$ stetig in a.

(iv) Für den Spezialfall, daß V' ein Körper mit Absolutbetrag ist, gilt: Wenn f, g in $a \in D$ stetige Abbildungen $D \to V'$ sind, so ist $f \cdot g$ stetig in a. Gilt überdies $g(a) \neq 0$, so ist $\frac{f}{g}$ stetig in a.

(v) Es seien V normiert mit l_p-Norm, $D \subset V$, $f : D \to K^n$, K ein Körper mit Absolutbetrag und K^n normiert mit l_p-Norm. Die sog. **Projektion** $p_i : K^n \to K$ auf die i-te Koordinate sei definiert durch $p_i((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) := \alpha_i$. Dann gilt für $a \in D$: f ist genau dann in a stetig, wenn $p_1 \circ f, \ldots, p_n \circ f$ in a stetig sind.

(vi) Die von den Polynomen $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ definierten Abbildungen $K^n \to K$ sind überall stetig.

(vii) $\exp(z)$ ist stetig auf $\mathbb{C}$. $e^r := \exp(r)$ definiert die stetige Ergänzung der in 3.12 auf $\mathbb{Q}$ definierten Potenz e^x für Argumente aus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

5.17 Satz : Sei D eine kompakte Teilmenge des normierten Raumes V und sei $f : D \to V'$ stetig. Dann ist $f(D)$ kompakt.

5.18 Folgerung : Unter den Voraussetzungen von 5.17 ist f beschränkt.

5.19 Satz (Weierstraß) : Es sei D eine kompakte, nichtleere Teilmenge eines normierten Raumes und es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine auf D stetige Funktion. Dann nimmt f auf D ein Maximum und ein Minimum an.

5.20 Definitionen : Sei M eine Teilmenge des normierten Raumes V und sei $A \subset M$.

(i) A heißt **(relativ) offen** in M, wenn eine in V offene Teilmenge A^* existiert, so daß $A = A^* \cap M$ ist.

(ii) M heißt **zusammenhängend**, wenn es sich nicht als disjunkte Vereinigung $M = A \,\dot{\cup}\, B$ zweier nichtleerer, in M relativ offener Teilmengen darstellen läßt.

5.21 Satz : Wenn D eine zusammenhängende Teilmenge eines normierten Raumes ist und $f : D \to V'$ eine stetige Abbildung ist, so ist $f(D)$ zusammenhängend.

5.22 Satz (Zwischenwertsatz) : Es sei D zusammenhängend und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig auf D. Dann gehört jede reelle Zahl, die zwischen zwei Punkten von $f(D)$ liegt, zu $f(D)$.

5.23 Folgerung : Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ ist, so gilt
$$\bigwedge_{\gamma \in]f(a),f(b)[} \bigvee_{c \in]a,b[} f(c) = \gamma.$$

5.24 Folgerung : Wenn $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und $f(a)f(b) < 0$ ist, so existiert $c \in [a,b]$ mit $f(c) = 0$. (Grundlage des **Bisektionsverfahrens**).

5.25 Bemerkungen :

(i) Sei f eine Bijektion mit der Eigenschaft, daß die Bilder offener Mengen unter f offen sind, eine sogenannte **offene Abbildung**. Dann ist die Umkehrabbildung $\hat{f}$ von f eine stetige Abbildung.
Denn: Sei U offen und sei $\hat{Z} := \hat{f}^{-1}(U)$. Dann ist $f(U) = f\hat{f}(\hat{Z}) = \hat{Z}$ offen.

(ii) Eine Bijektion ist genau dann offen, wenn sie abgeschlossen ist.
Denn: Sei f abgeschlossen und A offen. Dann ist $\mathcal{C}_D A$ abgeschlossen, also ist $f(\mathcal{C}_D A) = \mathcal{C}_{f(D)} f(A)$ abgeschlossen und somit $f(A)$ offen. Die andere Richtung folgt analog.

5.26 Satz : Es seien $f : D \to V'$ injektiv stetig und D kompakt. Dann ist die Umkehrfunktion $\hat{f} : f(D) \to D$ mit $\hat{f} \circ f = \mathrm{id}$ stetig.
Beweis: Wenn wir zeigen können, daß f abgeschlossen ist, so sind wir fertig; denn nach 5.25(ii) ist dann f offen und nach 5.25(i) $\hat{f}$ stetig. Sei also A abgeschlossen, $A \subset D$. Nach 5.8(iv) ist A kompakt und nach 5.17 ist $f(A)$ kompakt. Also folgt wie im ersten Teil des Beweises von 5.22, daß $f(A)$ abgeschlossen ist.

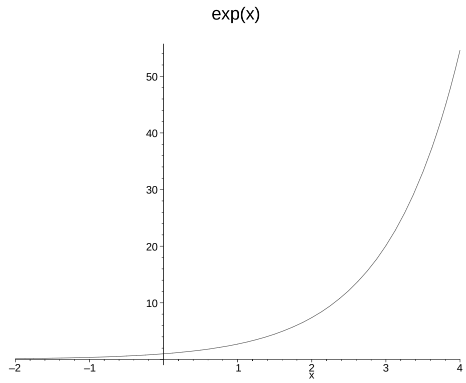
5.27 Satz : Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f genau dann injektiv, wenn es streng monoton ist.
Beweis: Die „Wenn-Richtung“ ist trivial: denn, wenn $u < v$ ist, so ist $f(u) < f(v)$ und somit f injektiv.
Sei nun f als injektiv vorausgesetzt. Dann ist für $a < b \quad f(a) \neq f(b)$. Ohne Einschränkung können wir $f(a) < f(b)$ annehmen. Wenn $a < u < b$ ist, so gilt auch $f(a) < f(u) < f(b)$. Denn die Annahme $f(b) < f(u)$ impliziert nach dem Zwischenwertsatz 5.22 die Existenz von $c \in [a,u]$ mit $f(c) = f(b)$, und das ist ein Widerspruch zur Injektivität von f. Also $f(u) < f(b)$. Ebenso

zeigt man $f(a) < f(u)$.
Wenn nun $a < u < v < b$ ist, so gilt nach dem soeben Bewiesenen $f(a) < f(u)$ und $f(a) < f(v)$. Die Annahme $f(v) < f(u)$ führt man wiederum mit Hilfe des Zwischenwertsatzes zum Widerspruch. Damit ist die Monotonie gezeigt.

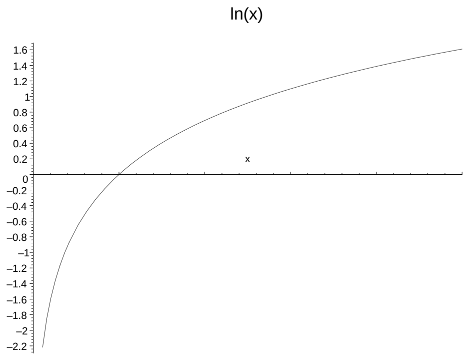
5.28 Elementare Funktionen :

(i) $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ist auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ streng monoton wachsend und stetig (Im angeordneten Körper gilt: $a > 0$, $b > 0$, $a > b \to a^2 > b^2$. Beweis? Also ist x^n streng monoton wachsend. Die Stetigkeit der Funktion folgt aus 5.16(iv).). Somit existiert nach 5.26 und 5.27 die Umkehrfunktion $\hat{f}(x) =: \sqrt[n]{x}$ und ist stetig auf $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

(ii) $f(x) = \exp x = e^x$ ist nach 5.16(vii) stetig auf $\mathbb{R}$. Sie ist dort streng monoton wachsend: $x > 0 \to e^x > 1$, $x_1 < x_2 \to e^{x_2} = e^{x_2 - x_1} e^{x_1} > e^{x_1}$.



Also ist $\hat{f}(x) := \ln x$, der sog. **natürliche Logarithmus**, definiert und stetig auf $f(D)$. Wertevorrat D von e^x:
Da $e^n \geq 1 + n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist, ist $\lim e^n = \infty$, $\lim e^{-n} = 0$. Nach 5.22 ist der Wertevorrat also $\mathbb{R}^+$.
Aus $e^x e^y = e^{x+y}$ folgt $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

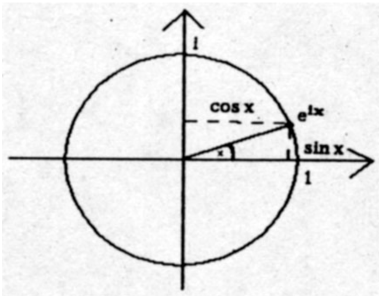


(iii) Sei $a \in \mathbb{R}^+$. Definiere $\exp_a(x) := \exp(x \ln a)$. $\exp_a(x)$ ist stetig auf $\mathbb{R}$ (Komposition stetiger Funktionen). Man rechnet leicht nach:
$\exp_a(0) = 1$, $\exp_a(1) = a$, $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$, $[\exp_a(\frac{p}{q})]^q = \exp_a(p) = a^p$, $\exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$.
Daher ist die Definition von $a^x := \exp(x \ln a)$ für $x \in \mathbb{R}$ gerechtfertigt. Die üblichen Potenzregeln für a^x lassen sich aus der Relationstreue von $\exp_a(x)$ herleiten. Ferner gilt: $\ln a^x = x \ln a$ für $x \in \mathbb{R}$.

(iv) Entsprechend zu 5.16(vii) definieren wir $e^z := \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$. Ferner definieren wir $\cos z := \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{z^{2\nu}}{(2\nu)!}$ sowie $\sin z := \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}$.

Dann gilt doch $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, die sog. **Moivresche Formel**. Die Abbildung $f(z) = \overline{z}$ ist stetig, da sie eine Spiegelung an der reellen Achse bewirkt und mithin $|z - z_0| < \varepsilon \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ gilt. Also gilt $\overline{\exp(z)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}$, und das ist wegen der Stetigkeit des Übergangs zum Konjugiert-Komplexen $\lim_{n\to\infty} \overline{\sum_{\nu=0}^{n} \frac{z^\nu}{\nu!}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\overline{z}^\nu}{\nu!} = \exp(\overline{z})$. Da $|e^z| = |e^{\operatorname{Re} z}||e^{i \operatorname{Im} z}| = e^{\operatorname{Re} z}$ gilt, hat e^z auf $\mathbb{C}$ keine Nullstellen.

Somit gilt $|e^{iz}|^2 = e^{iz}\overline{e^{iz}} = e^{i \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z} e^{-i \operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z} = e^{-2 \operatorname{Im} z}$. Für $z = x \in \mathbb{R}$, d.h. für $\operatorname{Im} z = 0$, gilt dann $|e^{ix}| = 1$. Das ist die bekannte Formel $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ (siehe nebenstehende Skizze).



Da nach Definition $\cos(-z) = \cos z$ ist, der cos also eine **gerade Funktion** ist, der sin eine **ungerade Funktion** ist, d.h. $\sin(-z) = -\sin z$ gilt, gilt $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ und somit $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ sowie $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$. Daraus folgt, daß auch für komplexe Argumente gilt: $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. Mit Hilfe der Darstellungen von sin und cos mittels der Exponentialfunktion und mittels der Moivreschen Formel lassen sich leicht die **Additionstheoreme** nachrechnen:

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 \quad ,$$

$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \quad .$$

Wir wollen nun das sog. **Restglied** $r_{2n+2}(x)$ der reellen Cosinus-Funktion abschätzen, das durch $\cos x = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} + r_{2n+2}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, definiert sei.

Es ist $r_{2n+2}(x) = \pm \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}(1 - \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} + \frac{x^4}{(2n+3)...(2n+6)} - + \ldots)$. Wir setzen für die Summanden in der runden Klammer $a_k := \frac{x^{2k}}{(2n+3)...(2n+2(k+1))} =$

$a_{k-1}\frac{x^2}{(2n+2k+1)(2n+2k+2)}$. Es ist $(2n+3)^2 < (2n+2k+1)(2n+2k+2)$, also $x^2 < (2n+2k+1)(2n+2k+2)$ für $|x| \leq 2n+3$. Somit gilt $1 > a_1 > a_2 > \ldots$ und daher $0 \leq 1 - a_1 + a_2 - a_3 + - \ldots \leq 1$.
Also gilt folgende Abschätzung für das Restglied des Cosinus: Für $|x| \leq 2n+3$ gilt $|r_{2n+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$.
Analog gilt für das Restglied des Sinus: Für $|x| \leq 2n+4$ gilt $|r_{2n+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

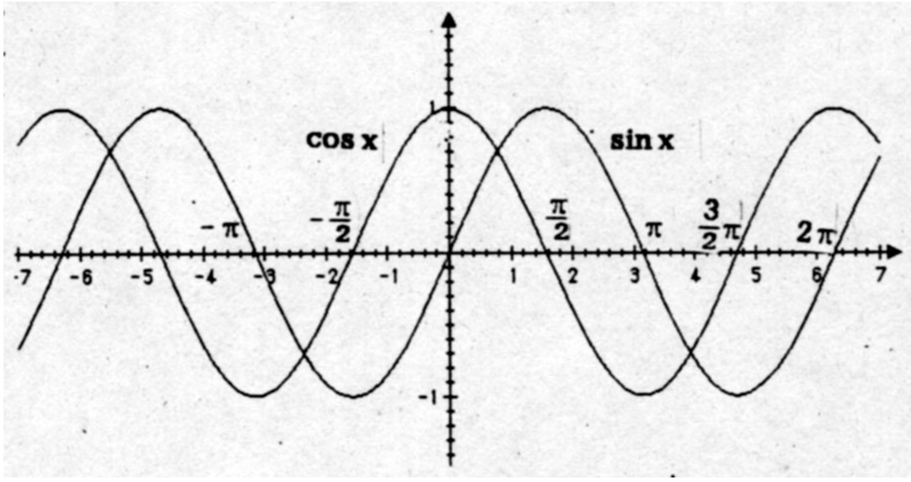
$\cos x$ ist in $[0,2]$ streng monoton fallend.
Denn: Für $0 \leq x < x' \leq 2$ gilt $\cos x' - \cos x = \cos\frac{u+v}{2} - \cos\frac{u-v}{2} = -2\sin\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2} = -2\sin\frac{x+x'}{2}\sin\frac{x'-x}{2}$. Nun ist $\sin x = x(1+\frac{r_3(x)}{x})$. Da nach obiger Abschätzung $|r_3(x)| \leq \frac{|x|^3}{3!}$ für $|x| \leq 4$, also erst recht für $x \in [0,2]$, gilt, haben wir in $[0,2]$ $|\frac{r_3(x)}{x}| \leq \frac{2^2}{3!} = \frac{2}{3}$ und somit $\sin x \geq x(1-\frac{2}{3}) = \frac{x}{3}$. Daher gilt in $[0,2]$ $\sin\frac{x'+x}{2} > 0$ sowie $\sin\frac{x'-x}{2} > 0$, also $\cos x' - \cos x < 0$.

$\cos x$ hat in $[0,2]$ genau eine Nullstelle.
Denn: Es ist $\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + r_4(2) \leq -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ wegen $|r_4(2)| \leq \frac{2^4}{4!}$, und es ist $\cos 0 = 1$. Also existiert nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $[0,2]$ und wegen der Monotonie genau eine.

Definition von π: Die Nullstelle von $\cos x$ in $[0,2]$ sei mit $\frac{\pi}{2}$ bezeichnet. Wir erhalten dann die Werte $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2}} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$, $e^{2\pi i} = 1$, $e^{z+i\frac{\pi}{2}} = ie^z$,$e^{z+i\pi} = -e^z$,$e^{z+2\pi i} = e^z$, e^z hat also Periode $2\pi i$. Es ist $e^{i\frac{n\pi}{2}} = i^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Daraus ergeben sich die Funktionswerte für $\sin x$ und $\cos x$ bei $\frac{n\pi}{2}$ sowie der umseitig skizzierte Funktionsverlauf.

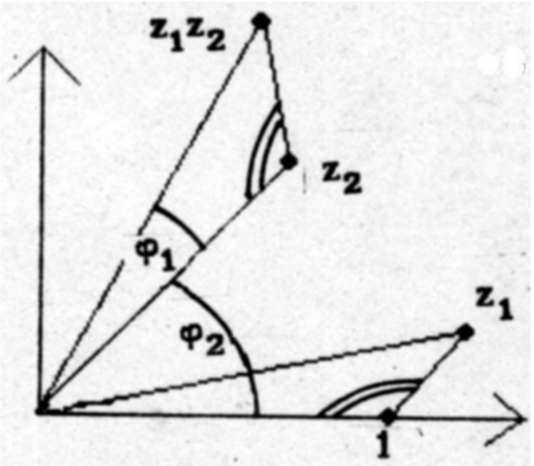
Da $\sin x$ in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ injektiv ist, existiert die Umkehrfunktion $\arcsin x$ auf $[-1,1]$, genannt der **Arcus-Sinus**. Analog $\arccos x$. Ferner wird $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ definiert für $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$ sowie $\cot x := \frac{1}{\tan x}$, $\arctan x$, $\operatorname{arccot} x$.

5.29 Satz : Jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ läßt sich eindeutig schreiben als $z = \rho e^{i\phi}$ mit $\rho \in \mathbb{R}^+$ und $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Es ist $\rho = |z|$, und $\phi := \arg z$ heißt das **Argument** von z. (ρ, ϕ) heißen die **Polarkoordinaten** von z.
Beweis: Idee: Für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat $\frac{z}{|z|}$ den Betrag 1, liegt also auf dem Einheitskreis der komplexen Ebene, d.h. $z = |z|e^{i\phi}$.



Ausführlich: Betrachte $\frac{z}{|z|} =: \xi + i\eta$. Es ist $|\xi + i\eta| = \xi^2 + \eta^2 = 1$, also $|\xi| \leq 1$. Mithin ist $\alpha := \arccos \xi$ definiert, und es ist $\sin \alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm\sqrt{1 - \xi^2} = \pm\eta$. Setze $\phi := \alpha$ für $\sin \alpha = \eta$ und $:= -\alpha$ für $\sin \alpha = -\eta$. Also ist $\frac{z}{|z|} = \cos(+\alpha) + i\sin(+\alpha) = e^{i\phi}$, und z ist in der angegebenen Gestalt darstellbar.
Eindeutigkeit: Sei $\rho_1 e^{i\phi_1} = \rho_2 e^{i\phi_2}$. Also gilt $\frac{\rho_1}{\rho_2} = e^{i(\phi_2 - \phi_1)} = \cos(\phi_2 - \phi_1) + i\sin(\phi_2 - \phi_1)$. Somit ist $\sin(\phi_2 - \phi_1) = 0$, $\cos(\phi_2 - \phi_1 = \pm 1)$, also $\rho_1 = \pm\rho_2$. Das Minuszeichen kommt wegen der Positivität der ρ nicht in Frage. Daher $e^{i\phi_1} = e^{i\phi_2}$, also $\phi_1 = \phi_2$. □

Wenn $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit Polarkoordinaten ρ_i, ϕ_i $(i = 1, 2)$ sind, so ermöglicht die Beziehung $z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\phi_1 + \phi_2)}$ eine geometrische Veranschaulichung der Multiplikation im Komplexen, wie in der nebenstehenden Graphik dargestellt: Die beiden Dreiecke sind zueinander ähnlich, also $1 : |z_2| = |z_1| : |z_1 z_2|$.



5.30 Satz : Es sei $n \in \mathbb{N}$, $z^n = 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n paarweise verschiedene Lösungen, die sogenannten **n-ten Einheitswurzeln** , nämlich $\zeta_k = e^{i\frac{2\pi}{n}k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Beweis: Wenn $z = \rho e^{i\phi}$, so ist $1 = z^n = \rho^n e^{in\phi} = \rho^n \cos n\phi + \rho^n i \sin n\phi$, also ist $n\phi = 2k\pi$ und $\rho = 1$.

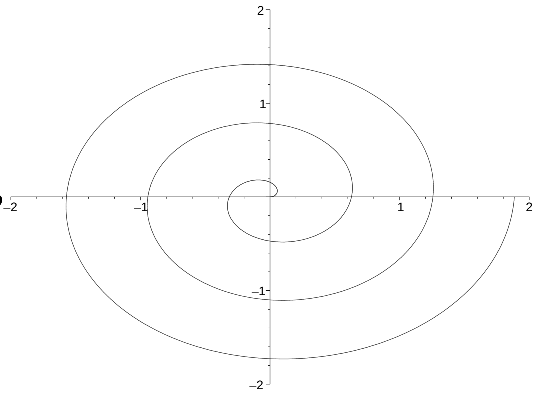
5.31 Einige Kurven in (erweiterter[1]) Polarkoordinaten-Darstellung :

(i) **Kreis**
um $(0,0)$ $\quad \rho = \text{const.}$,
um α nach rechts verschoben $\quad \rho = 2\alpha \cos\phi$,
um α nach oben verschoben $\rho = 2\alpha \sin\phi$.

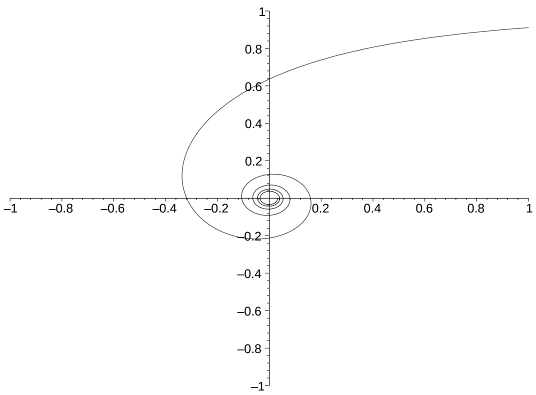
(ii) **Gerade** $\quad \rho = \frac{n}{\sin\phi - m\cos\phi}$

(iii) **Logarithmische Spirale** $\quad \rho = \alpha e^{\beta\phi}$
(siehe die Schnecke auf Seite 24)

(iv) **Archimedische Spirale** $\rho = \alpha\phi$

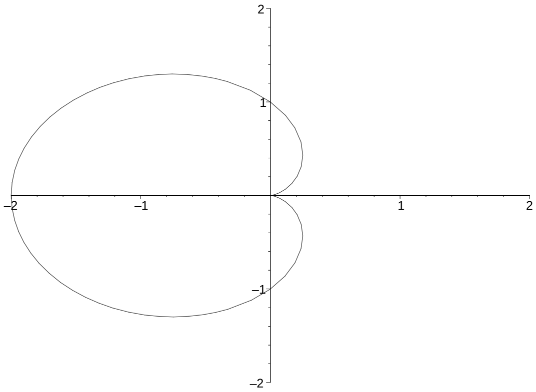


(v) **Hyperbolische Spirale** $\rho = \frac{1}{\phi}$

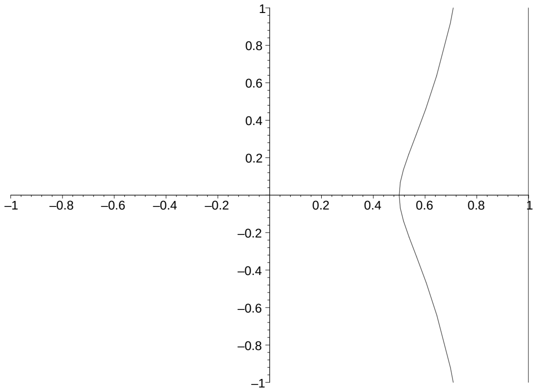


[1] Es sind auch Winkel $\varphi > 2\pi$ zugelassen.

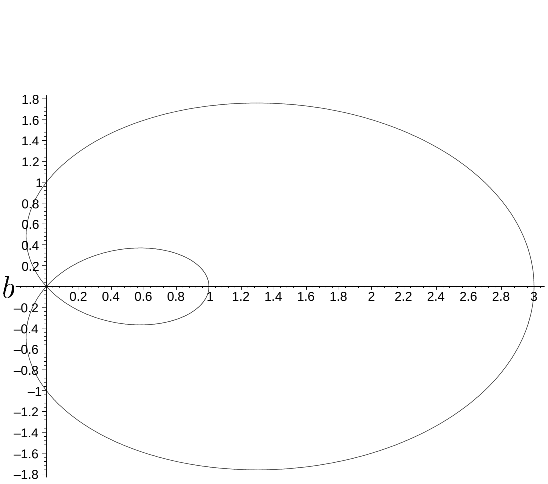
(vi) **Kardioide** $\rho = 2\alpha(1 - \cos\phi)$



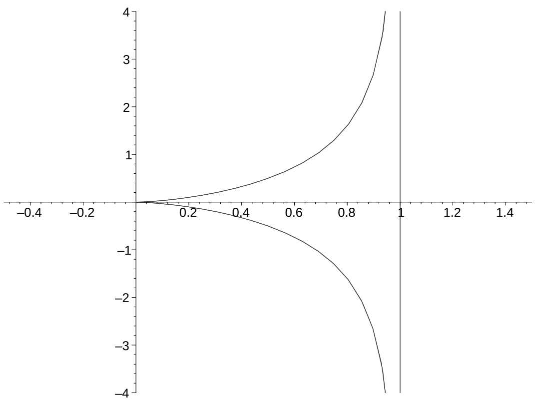
(vii) **Konchoide**, Typ I $\rho = \frac{\alpha}{\cos\phi} \pm \beta$



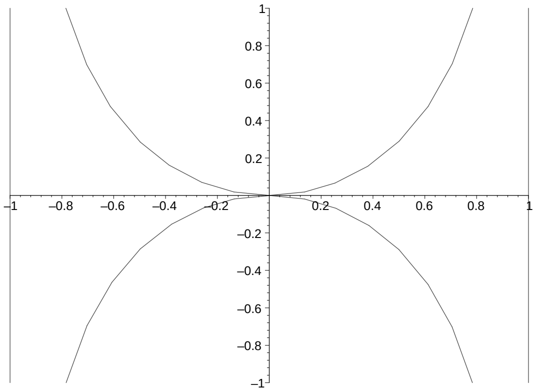
(viii) **Konchoide**, TypII $\rho = a\cos\varphi + b$



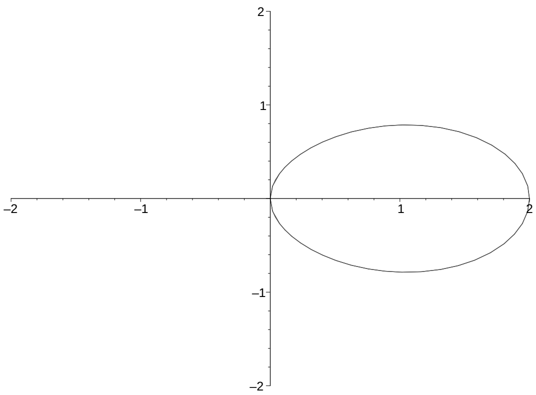
(ix) **Kissoide** $\rho = \alpha \sin\varphi \tan\varphi$



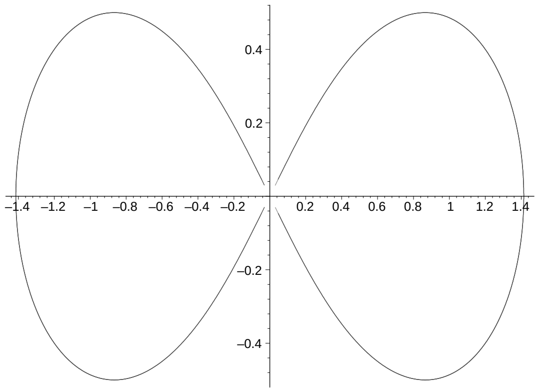
(x) **Kappakurve** $\rho = a \tan\varphi$



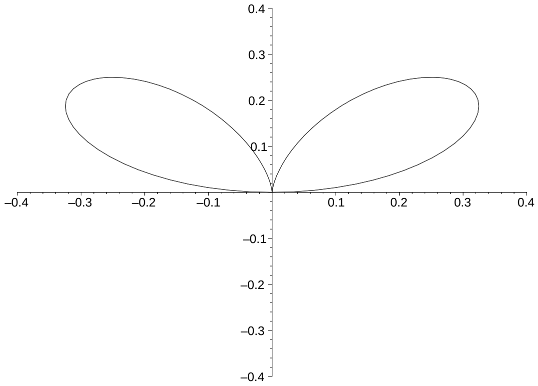
(xi) **Ovaloid** $\rho = a(1 + \cos^2\varphi)\cos\varphi$



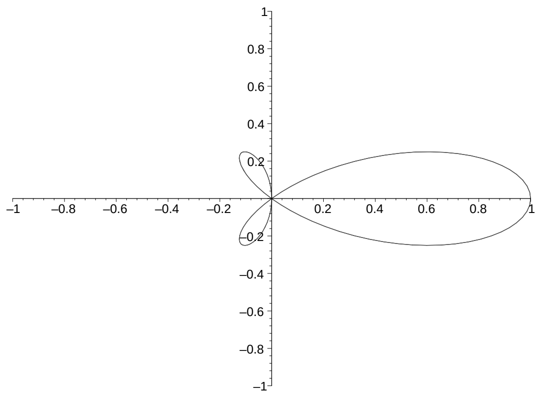
(xii) **Lemniskate** $\rho^2 = 2a^2 \cos^2 \phi$



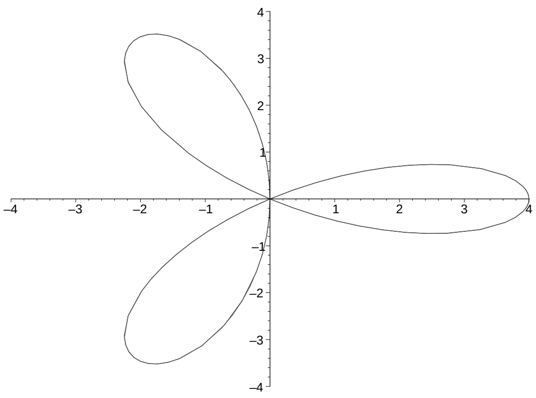
(xiii) **Zweiblatt** $\rho = a \cos^2 \varphi \sin \varphi$



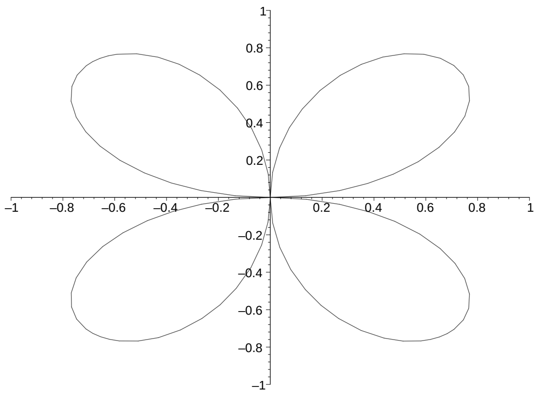
(xiv) **Dreiblatt** $\rho = a \cos \varphi \cos 2\varphi$



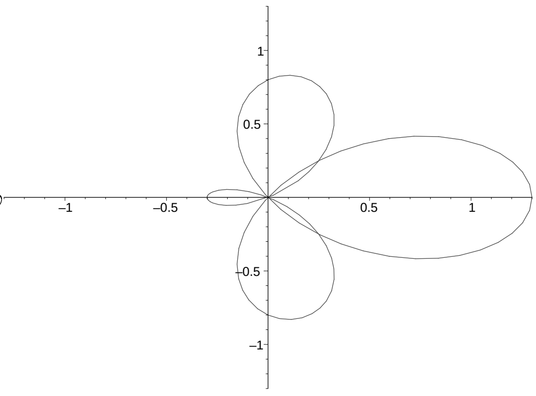
(xv) **Hypozykloide** $\rho = 4a\cos 3\varphi$



(xvi) **Vierblatt** $\rho = a\sin 2\varphi$

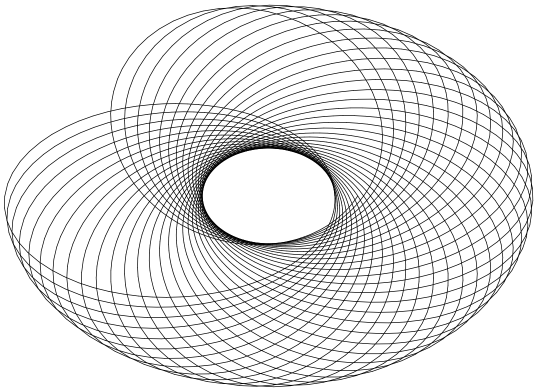


(xvii) **Skarabäus** $\rho = a\cos\varphi + b\cos 2\varphi$



Perihelbewegung

(xviii) $\rho = (1 + a\cos b\varphi)^{-1}$ [2]



Mit einem Computeralgebra-System, wie z. B. Maple, kann man noch viele weitere Kurven zeichnen (Experimentieren Sie ruhig ein wenig!), zum Beispiel die folgende schöne Fay-Schmetterlingskurve. Maple-Befehl:
> polarplot($\exp(\cos(phi)) - 2\cos(4 * phi) + sin(phi/12)^5, phi = 0..24 * Pi)$;

---

[2]Eines der Indizien für die Richtigkeit der allgemeinen Relativitätstheorie war die Tatsache, daß die Perihelbewegung des Merkur aus den Einsteinschen Gleichungen ableitbar ist, während sie mit der Newtonschen Physik nicht erklärt werden kann. Die Bewegung eines freien Teilchens im Raum-Zeit-Kontinuum mit Schwarzschild-Metrik genügt nämlich der Differentialgleichung $\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{kM}{A^2} + \frac{3kM}{c^2}u^2$ ($u = \frac{1}{\rho}$, ρ der Abstand zum Zentralgestirn, k Gravitationskonstante, M Masse des Zentralgestirns, A Drehmoment der betreffenden Bewegung, c Lichtgeschwindigkeit). $u = \frac{kM}{A^2}(1 + \epsilon\cos\eta\phi)$ mit $\eta^2 = 1 - 6\frac{(kM)^2}{(cA)^2}$ und der Bahnexzentrizität ϵ ist eine Lösung der Gleichung. Der obige Plot mit vergöberten Daten simuliert sehr schön die Perihelbewegung. Rechnerisch ergeben die Bahndaten des Merkur eine Perihelbewegung von 43 Bogensekunden pro Jahrhundert. Literatur: R. K. Pathria, The Theory of Relativity. Pergamon Press, Oxford 1974.