Kapitel 6

Lineare Abbildungen, Koordinatensysteme

Natürlich werden wir auch die „strukturverträglichen“ Abbildungen von Vektorräumen, die Vektorraummorphismen, studieren. Das sind die bezüglich der Addition und der Multiplikation Skalar $\times$ Vektor relationstreuen Abbildungen:

6.1 Definitionen : Sei K ein Körper, und seien V, V' K-Vektorräume.

(i) Eine Abbildung $l : V \to V'$ heißt eine **lineare Abbildung** oder ein **Vektorraum(homo)morphismus**, wenn $l(x+y) = l(x) + l(y)$ und $l(\lambda x) = \lambda l(x)$ für alle $x, y \in V$ und für alle $\lambda \in K$ gilt.

(ii) $\operatorname{Kern} l := l^{-1}(0)$, das volle Urbild von 0, heißt der **Kern** des Morphismus.

(iii) Wenn l überdies bijektiv ist, so heißt l ein **Vektorraumisomorphismus**.

(iv) Wenn $V = V'$ ist, so sprechen wir von einem **Vektorraumendomorphismus** bzw. von einem **Vektorraumautomorphismus**.

(v) Die Menge aller Vektorraumhomomorphismen bezeichnen wir mit $\operatorname{Hom}_K(V, V')$, die der Endomorphismen mit $\operatorname{End}_K V$, die der Automorphismen mit $\operatorname{Aut}_K V$.

6.2 Bemerkungen :

(i) Die von uns schon als Beispiele zur Veranschaulichung von Operationen in Gruppen herangezogenen Drehungen sind auch hier nützlich: Im $\mathbb{R}^2$

ist eine Drehung um $(0,0)$ ein Element von $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^2$. Machen Sie sich die Relationstreue anschaulich klar!

(ii) Wenn $l \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$ ist, so ist wegen 2.14(i) $l(0) = 0$.

(iii) Sei $l : V \to V'$ ein Vektorraumisomorphismus und sei B eine Basis von V. Dann ist $l(B)$ eine Basis von V'.
Denn: Seien $B := \{b_i : i \in I\}$, $b_i' := l(b_i)$ und $\sum \lambda_i b_i' = 0$. Dann ist $0 = l^{-1}(0) = \sum \lambda_i l^{-1}(b_i')$, also wegen der linearen Unabhängigkeit der b_i $\lambda_i = 0$ für alle i. Mithin ist $\{l(b_i) : i \in I\}$ linear unabhängig. Die Menge ist aber auch ein Erzeugendensystem für V': Für $v' \in V'$ suchen wir die eindeutige Darstellung $l^{-1}(v') = \sum \lambda_i b_i$. Dann ist $v' = l \circ l^{-1}(v') = l(\sum \lambda_i b_i) = \sum \lambda_i l(b_i)$.

(iv) Umgekehrt läßt sich jede Bijektion zwischen Basen der K-Vektorräume V und V' eindeutig zu einem Isomorphismus zwischen V und V' fortsetzen (sog. **lineare Fortsetzung**). Allgemeiner: Jede Abbildung einer Basis von V nach V' hinein läßt sich eindeutig zu einer linearen Abbildung $V \to V'$ fortsetzen.
Denn: Jede lineare Abbildung ist durch ihr Wirken auf einer Basis $\{b_i : i \in I\}$ bereits eindeutig festgelegt; d.h., will man eine Abbildung $\{b_i : i \in I\} \to V'$ zu einer linearen Abbildung l von V fortsetzen, so muß man diese Fortsetzung als $v = \sum \lambda_i b_i \mapsto \sum \lambda_i b_i'$ definieren, damit Relationstreue gewährleistet ist, und die Relationstreue wird so auch erreicht.

(v) Sei $l \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$. Dann gelten: Kern $l < V$, $l(V) < V'$, $l(\langle M \rangle) = \langle l(M) \rangle$ für $M \subset V$ sowie die Äquivalenz Kern $l = \{0\} \leftrightarrow l$ injektiv. Ferner: Wenn $v_1, \ldots, v_n$ in V linear abhängig sind, so sind es $l(v_1), \ldots, l(v_n)$ in $l(V)$. Kontraposition liefert: Wenn $l(v_1), \ldots, l(v_n)$ linear unabhängig in $l(V)$ sind, so sind es $v_1, \ldots, v_n$ in V. Die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen **nicht**: denn es kann ja $v_i \neq 0$ und $l(v_i) = 0$ sein.

6.3 Satz : Es seien V, W K-Vektorräume. Dann gilt: $V \simeq W \leftrightarrow \mathrm{Dim}_K V = \mathrm{Dim}_K W$.[1]
Beweis: Wenn ein Isomorphismus von V auf W existiert, so bildet dieser nach 6.2(v) jedes linear unabhängige Erzeugendensystem von V auf ein solches von W ab. Wenn umgekehrt $\mathrm{Dim}_K V = \mathrm{Dim}_K W$ ist, so existiert eine Bijektion zwischen jeder Basis von V und jeder von W. Die lineare Fortsetzung einer derartigen Bijektion liefert dann den behaupteten Isomorphismus.

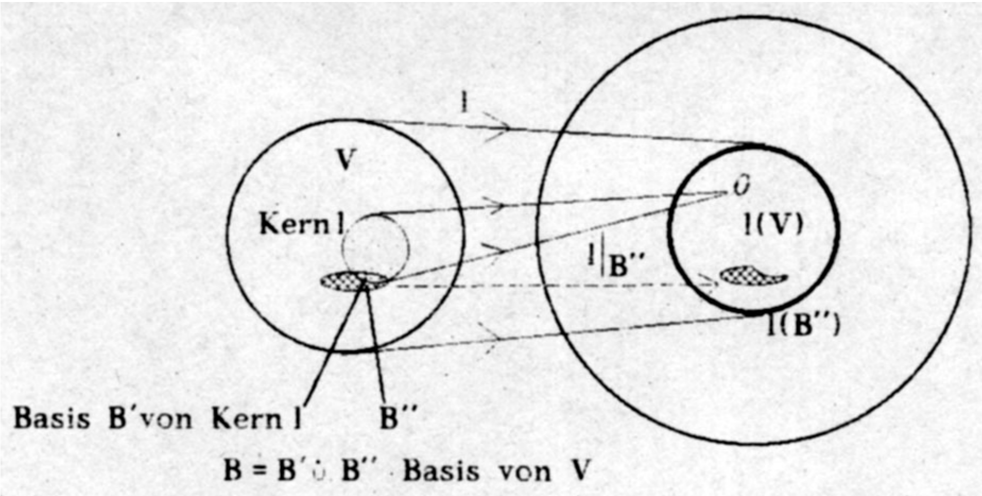
[1] Die Aussage des Satzes gilt auch im Falle nichtendlicher Dimensionen.

Der letzte Satz zeigt, daß es zu jeder Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ höchstens eine Isomorphieklasse von Vektorräumen der Dimension $\mathfrak{m}$ gibt. Es kann gezeigt werden, daß es auch immer mindestens eine gibt.

6.4 Satz : Zu jeder Kardinalzahl $\mathfrak{m}$ existiert ein K-Vektorraum der Dimension $\mathfrak{m}$.
Beweis: siehe E. Brieskorn, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Band I, pp. 270ff.

6.5 Bemerkung : Sei V Vektorraum endlicher Dimension n über einem endlichen Körper K. Dann ist $|V| = |K|^n$. Für endliche K-Vektorräume gilt: $|V| = |W| \leftrightarrow V \simeq W$.
Achtung: Für endliche Gruppen gilt die Richtung $\rightarrow$ einer analogen Aussage **nicht**! Denn zum Beispiel sind D_3 und C_6 nicht isomorph.

6.6 Satz : Es seien V, V' K-Vektorräume und $l \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$. Sei B' eine Basis von Kern l und sei $B = B' \dot\cup B''$ eine Basis von V. Dann ist $l(B'')$ eine Basis von $l(V)$, und mithin ist die Einschränkung $l|_{B''}$ von l auf B'' injektiv.



Beweis: Da $l(B') = \{0\}$ ist, haben wir $\langle l(B'')\rangle = \langle l(B)\rangle = l(\langle B\rangle) = l(V)$. Zu zeigen bleibt also die lineare Unabhängigkeit von $l(B'')$.
Seien $b_1'', \ldots, b_r''$ paarweise verschiedene Elemente von B'' und sei $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i l(b_i'') = 0$. Dann ist $l(\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i b_i'') = 0$ und somit $\sum\limits_{i=1}^{r} \lambda_i b_i'' = \sum\limits_{j=1}^{s} \mu_j b_j'$ mit paarweise verschiedenen $b_1', \ldots, b_s'$ aus B'. Nun ist $\{b_1', \ldots, b_s', b_1'', \ldots, b_r''\}$ als Teilmenge

von B linear unabhängig, also $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \mu_1 = \ldots = \mu_s = 0$, also $l(b_1''), \ldots, l(b_r'')$ linear unabhängig, insbesondere paarweise verschieden. Mithin ist $l|_{B''}$ injektiv und $l(B'')$ linear unabhängig.

6.7 Folgerung : Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension und sei l eine lineare Abbildung von V. Dann gilt: $\mathrm{Dim}_K \mathrm{Kern} l + \mathrm{Dim}_K\, l(V) = \mathrm{Dim}_K\, V$.

Slogan: Dimension des Kerns plus Dimension des Bildes gleich Dimension des Urbildes.

6.8 Definitionen : Sei $\mathrm{Dim}_K V = n$. Wir wissen, daß dann $V \simeq K^n$ ist (siehe 6.3). Jeder diese Isomorphie vermittelnde Isomorphismus $\phi : V \to K^n$, $\phi(v) := (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, heißt ein **Koordinatensystem** für V. ϕ heißt die **Koordinatenabbildung**, und die λ_i heißen die **Koordinaten** von v unter ϕ.

6.9 Bemerkung : ϕ zeichnet in V eine Basis B aus, nämlich die aus den Urbildern $b_j := \phi^{-1}(e_j)$ der Standardbasisvektoren von K^n bestehende Menge. Umgekehrt kann durch Auszeichnung einer Basis in V eindeutig (bis auf Reihenfolge) ein Koordinatensystem festgelegt werden (6.2(iv)). Es gilt: $\phi(v) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leftrightarrow v = \sum \lambda_i b_i$.

Der Ursprung der Benennung „Koordinaten" reicht weit in die Antike zurück. Der zur Zeit Trajans (um 100) lebende römische Feldmesser Balbus benutzt in einer Darstellung der elementaren geometrischen Begriffe die Bezeichnung „ordinatae rectae lineae" für Parallelen.[2] Von Leibniz wird diese Nomenklatur 1692 folgendermaßen weiterentwickelt:

Auf der x-Achse stehe eine Schar von Parallelen senkrecht. Diese „Ordinaten" (ordinatae lineae) schneiden auf der x-Achse die „Abszissenwerte" ab (abscissum, lat. für „abgeschnitten"). Abszissen- und Ordinatenwerte nennt Leibniz dann „Koordinaten" .

Vorausgegangen war die systematische Einführung der Koordinatenmethode durch Rene' Descartes (Renatus Cartesius)[3] - die Erschaffung der analytischen Geometrie.

[2]„ordinatae rectae lineae sunt quae in eadem planitia positae et eiectae in utramque partem in infinitum non concurrunt." Balbi ad Celsum 98, 16. Übersetzt: „Ordinaten sind Geraden, welche in einer Ebene gelegen sind und sich auch bei Fortsetzung nach beiden Seiten ins Unendliche nicht schneiden."

[3]Descartes - von Jesuiten erzogen - führt zunächst ein abenteuerliches Leben als Söld-

Descartes wünschte sich eine allgemeine Methode zur Gewinnung sicherer wissenschaftlicher Erkenntnis (über die Mathematik hinausreichend!). Wie gewinnt man solche Sicherheit? Durch Zusammenwirken von ganzheitlicher Anschauung („Klarheit“) einerseits und diskursivem Denken, Feststellen von Beziehungszusammenhängen („Distinktheit“) andererseits, also durch Erfüllung der Cartesischen Forderung „clare et distincte“. Die Entdeckung der analytischen Geometrie war für Descartes ein Beispiel für die Kraft seiner Methode, eine Synthese von Geometrie (clare) und Algebra (distincte), welche erlaubte,

R. Descartes
1596 - 1650

„der geometrischen Analyse und der Algebra ihr Bestes zu entlehnen und alle Fehler der einen durch die andere zu korrigieren“.[4]

Descartes gebrauchte übrigens schräge Koordinatenachsen (nicht orthogonale) ebenso wie sein Zeitgenosse Pierre de Fermat, der unabhängig von Descartes auch auf die Koordinatenmethode gekommen war.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, die n-Tupel von K^n als Spaltenvek-

---

ner. Er nimmt an der Eroberung von Prag (1620) teil, erhält sogar das Angebot, Generalleutnant zu werden. Er entkommmt einem Mordanschlag einer Schiffsbesatzung, hat viele Amouren, heiratet jedoch nie. Im Winterlager bei Neuburg an der Donau hat er am 16. 10. 1619 einen Traum, der ihm den Zauberschlüssel zu den wahren Grundlagen aller Wissenschaften verheißt. Das ist die Geburtsstunde der analytischen Geometrie. Er entsagt 1628 dem Soldatenleben und zieht sich nach Holland in die ländliche Einsamkeit zurück (nur Mersenne kennt seinen Aufenthalt). Er arbeitet über Philosophie, Mathematik und Naturwissenschaften. Infolge der Ermordung der Naturphilosophen Giordano Bruno(†1600) und Lucilio Vanini (†1619) durch die Inquisition sowie der Verurteilung Galileis (1633) veröffentlicht er - entgegen seiner ursprünglichen Absicht - über seine Ergebnisse zunächst keine Zeile. Erst auf Drängen und ausdrücklichen Wunsch des Kardinals Richelieu publiziert er 1637 den 'Discours de la methode'. Dennoch kamen Descartes' Werke nach seinem Tod auf den index librorum prohibitorum (und standen dort noch im 20. Jahrhundert!!). Ungewöhnlich wie das Leben war auch das Sterben. Königin Christine von Schweden ruft ihn an den Hof nach Stockholm. Dort muß er ihr täglich um 5 Uhr morgens Unterricht geben. Im auf die Ankunft folgenden Winter (Februar 1650) stirbt Descartes. Vor kurzem ist eine Untersuchung erschienen, die Indizien für eine Ermordung Descartes' zusammengetragen hat (Eike Pies: Der Mordfall Descartes.Brockhaus, Stuttgart 1996).

[4] Zitat aus Descartes' Werk Discours de la Methode (1637), 2.11, wo er seine Methode zusammen mit den berühmten drei Anhängen vorstellte, darunter „La Geometrie“.

toren zu schreiben.

Es seien nun $l \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$, $\mathrm{Dim}\, V = n$, $\mathrm{Dim}\, V' = m$ und $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$, $B' = \{b_1', \ldots, b_m'\}$ Basen von V bzw. V'. Dann ist

$$\boxed{l(b_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i'}\,. \qquad (*)$$

Die Abbildung l liefert also eine Matrix $M_{B,B'}(l) := (\alpha_{ij})$, und umgekehrt ist l durch die α_{ij} eindeutig festgelegt. $l \mapsto M_{B,B'}(l)$ vermittelt also eine Bijektion $M_{B,B'} : \mathrm{Hom}_K(V, V') \to M_{m,n}(K)$.

6.10 Definitionen : $M_{B,B'}(l)$ heißt die **darstellende Matrix** oder die **Abbildungsmatrix** bezüglich der Basen B und B'. Seien $(\alpha_{ij}) = A \in M_{l,m}(K)$ und $(\beta_{ij}) = B \in M_{m,n}(K)$. Dann werde eine Multiplikation der Matrizen definiert durch $AB = (\gamma_{ij}) \in M_{l,n}(K)$ mit $\gamma_{ij} := \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\beta_{kj}$.

Slogan: Zeile mal Spalte

(*) von oben liefert uns $\phi_{B'}(l(b_j)) = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \ldots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$, also „die j-te Spalte von $M_{B,B'}(l)$ ist der Koordinatenvektor von $l(b_j)$ bezüglich der Basis B'“.

Slogan: Die Spalten der Abbildungsmatrix sind die Koordinatenvektoren der Bilder der Basisvektoren

Es gilt also $\phi_{B'}(l(b_j)) = (\alpha_{ij})e_j = M_{B,B'}(l)\phi_B(b_j)$ und mithin wegen der Relationstreue von l, ϕ_B, $\phi_{B'}$:

$\phi_{B'}(l(v)) = M_{B,B'}(l)\phi_B(v)$ $für alle$ $v \in V$. $(**)$

(Dabei bedeutet die Multiplikation in den letzten beiden Formeln Matrizenmultiplikation; e_j ist j-ter Vektor der Standardbasis, jedoch als Spaltenvektor aufgefaßt.)

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{l} & l(v) \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_B} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{B'}} \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} & \xrightarrow{M_{B,B'}(l)} & \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Wirkung von linearen Abbildungen läßt sich also auch durch die Multiplikation der darstellenden Matrix mit dem als Spalte geschriebenen Koordinatenvektor des Urbildes beschreiben.

6.11 Satz : Seien V, V' K-Vektorräume der (endlichen) Dimension n bzw. m mit Basen B bzw. B'. Dann vermittelt die Abbildung $M_{B,B'} : l \mapsto M_{B,B'}(l)$ einen Vektorraumisomorphismus von $\operatorname{Hom}_k(V, V')$ mit $M_{m,n}(K)$.
Beweis: l legt über $M_{B,B'}$ eine Matrix fest, und umgekehrt legt jede Matrix aus $M_{m,n}(K)$ eine lineare Abbildung $l : V \mapsto V'$ fest. Die Abbildung $M_{B,B'}$ ist also bijektiv. Für l_1, $l_2 \in \operatorname{Hom}_K(V, V')$ gilt $(l_1 + l_2)(b_j) = l_1(b_j) + l_2(b_j) = \sum \alpha_{ij}^{(1)} b_i' + \sum \alpha_{ij}^{(2)} b_i' = \sum (\alpha_{ij}^{(1)} + \alpha_{ij}^{(2)}) b_i'$, also $M_{B,B'}(l_1 + l_2) = M_{B,B'}(l_1) + M_{B,B'}(l_2)$, und ebenso gilt die Relationstreue bezüglich der Multiplikation mit Skalaren.

Nun ist im Spezialfall $V = V'$ die Menge $\operatorname{Hom}_K(V, V') = \operatorname{End}_K V$ der Endomorphismen von V bzw. die Menge $M_{n,n}(K)$ nicht nur ein K-Vektorraum, sondern auch bezüglich der Komposition der Abbildungen ein Ring.

Analog zu 6.11 gilt:

6.12 Satz : Sei V ein K-Vektorraum der Dimension n mit Basis B. Dann vermittelt $M_{B,B} : l \mapsto M_{B,B}(l)$ einen Ringisomorphismus zwischen $\operatorname{End}_K V$ und $M_{n,n}(K)$.

$M_{n,n}(K)$ ist eine algebraische Struktur, die sowohl ein Vektorraum als auch ein Ring ist. Dafür haben die Mathematiker den Namen **K-Algebra** eingeführt. (Ein Hörer machte den originellen Vorschlag, sie doch „Vektorraumring“ zu nennen. Es sind natürlich noch zusätzlich Distributivgesetze $(\lambda a + \mu b)c = \lambda ac + \mu bc$ und $a(\lambda b + \mu c) = \lambda ab + \mu ac$ zu fordern. Zwischen $\operatorname{End}_K V$ und $M_{n,n}(K)$ vermittelt $M_{B,B}$ einen Algebrenisomorphismus. Wir wollen auf die Theorie der Algebren nicht näher eingehen. Es werden dabei statt Vektorräumen über Körpern auch allgemeiner sog. **Moduln** über Ringen betrachtet.)

6.13 Satz (Koordinatentransformation bei Basiswechsel) : Es seien V ein n-dimensionaler K-Vektorraum; B, B' zwei Basen von V; $l = \mathrm{id}_V$ und $b_j = \sum \alpha_{ij} b_i'$ der Übergang von der Basis B' zur Basis B. Dann beschreibt $(\alpha_{ij}) \cdot \phi_B(x) = \phi_{B'}(x)$ den Koordinatenübergang.

Slogan: Die Koordinaten transformieren sich kontragredient zur Basis.

Beweis: Nach (**) von Seite 106 gilt $\phi_{B'}(x) = M_{B,B'}(\mathrm{id}) \cdot \phi_B(x)$, und das ist die Behauptung.

6.14 Satz (Basiswechsel und lineare Transformation) : Es seien $A := \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B := \{b_1, \ldots, b_n\}$ Basen von V; $A' := \{a_1', \ldots, a_m'\}$, $B' :=$

$\{b_1^{'}, \ldots, b_m^{'}\}$ Basen von $V^{'}$, und es sei $l \in \mathrm{Hom}_K(V)$. Dann gilt

$$M_{B,B'}(l) \cdot M_{A,B}(\mathrm{id}) = M_{A',B'}(\mathrm{id}) \cdot M_{A,A'}(l) \quad .$$

Beweis:

Nach (**) von Seite 106 sind die vier inneren Teildiagramme der nebenstehenden Figur (2 Dreiecke, 2 Trapeze) kommutativ. Daraus folgt die Kommutativität des äußeren Rechtecks, und das ist die Behauptung.

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M_{A,A'}(l)"] \arrow[dd, "M_{A,B}(id)"'] & & & K^m \arrow[dd, "M_{A',B'}(id)"] \\
& V \arrow[ul, "\varphi_A"'] \arrow[dl, "\varphi_B"] \arrow[r, "l"'] & V' \arrow[ur, "\varphi_{A'}"] \arrow[dr, "\varphi_{B'}"'] & \\
K^n \arrow[rrr, "M_{B,B'}(l)"'] & & & K^m
\end{tikzcd}$$

6.15 Beispiel zu 6.14 : Es seien $V = K^4$, $V^{'} = K^2$, $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ (kanonische Basis), $B = \{b_1 := e_1, b_2 := e_1 + e_2, b_3 := e_1 + e_2 + e_3, b_4 := e_1 + e_2 + e_3 + e_4\}$, $A^{'} = \{e_1, e_2\}$ (kanonische Basis), $B^{'} = \{b_1^{'} := e_2, b_2^{'} := -e_1 - e_2\}$, und es sei $M_{A,A'}(l) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Dann ist wegen $\alpha_j^{'} = \sum \alpha_{ij}^{'} b_i^{'}$ $(\alpha_{ij}^{'}) = M_{A',B'}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ebenso ist wegen $a_j = \sum \alpha_{ij} b_i (\alpha_{ij}) = M_{A,B}(\mathrm{id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, also gilt

$$M_{B,B'}(l) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} .$$

Die **inverse Matrix** von $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist die Matrix A^{-1}, für die $A^{-1}A = E$ gilt, also die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Daher ergibt sich $M_{B,B'}(l) = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 & 16 \\ -1 & -3 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.