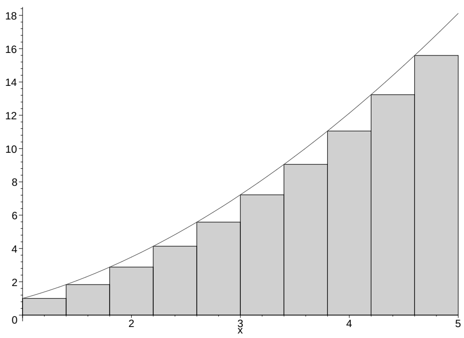
Kapitel 8

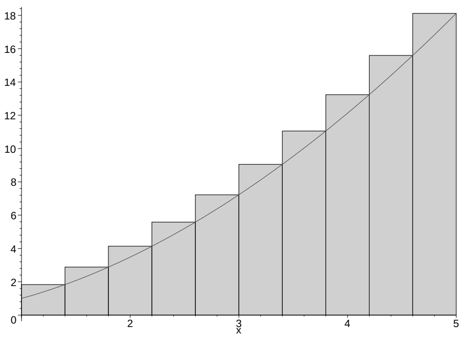
Das Riemannsche Integral

Motivation:
Sei $f : I \to \mathbf{R}$ stetig und $I = [\alpha, \beta]$ bzw. $I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ (oder ein Intervall höherer Dimension).

Gesucht ist der „Flächeninhalt“ bzw. das „Volumen“ unterhalb des Graphen von $f(x)$ und oberhalb von I. Ausgeführt wird die Abschätzung durch eine untere Rechteck(bzw. Quader-)summe sowie durch eine obere (sog. **Untersumme** bzw. **Obersumme**). Das gesuchte Volumen liegt dazwischen. Die Einteilung wird immer feiner gemacht, und das Supremum aller Untersummen und das Infimum aller Obersummen ermittelt. Wenn beide Werte übereinstimmen, hat man das Riemannsche Integral ermittelt.
Die folgenden vier Abbildungen [1] veranschaulichen den Sachverhalt für die Dimensionen 1 und 2.

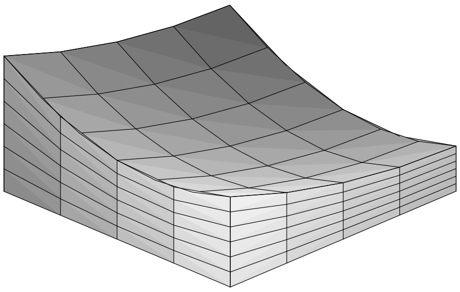


Untersumme

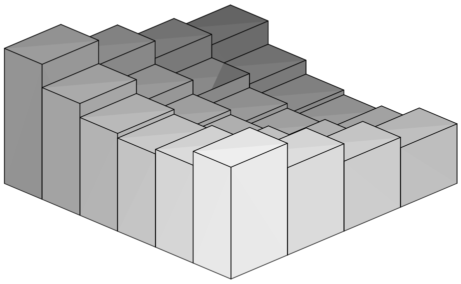


Obersumme

[1] Sie wurden mit Maple erstellt, die vierte mittels des Paketes mvcal von C. K. Cheung.



Volumen unter einem Flächenstück



Seine Approximation mittels einer Quadersumme

Ähnliche Zugänge zum Integralbegriff gibt es schon seit der Antike. Die Exhaustionsmethode des Eudoxos wurde von Archimedes virtuos gehandhabt, schön dargelegt in seiner Schrift 'Ad Eratosthenem methodus '. Später präsentierten z. B. Cavalieri und Kepler Integrationsüberlegungen. Die Integralrechnung ist also eine viel ältere Disziplin als die Differentialrechnung. Dennoch kam mit der Entwicklung letzterer ein neuer Impetus auch für die erstere. Wie bei der Differentiation gehen die beiden großen Protagonisten Leibniz und Newton auch bei der Integration verschiedene Wege: Newton interessiert hauptsächlich die inverse Operation zur Ableitung, also das Auffinden einer Stammfunktion (siehe 8.19ff.), engl. antiderivative, neuerdings bei uns öfter auch Aufleitung genannt. Leibniz - mehr in der antiken, atomistischen Tradition beheimatet - arbeitet den verallgemeinerten Summationsprozeß heraus. So führt er auch das $\int$-Zeichen ein, ein stilisiertes Summenzeichen.

8.1 Definitionen :

(i) Für $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^n$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{R}^n$ heißt $[a, b] := \{x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n : \alpha_i \leq \xi_i \leq \beta_i \forall i = 1, \ldots, n\}$ ein **abgeschlossenes Intervall** in $\mathbf{R}^n$; analog: $]a, b[$ **offenes Intervall**, $]a, b]$ oder $[a, b[$ **halboffenes Intervall**.

(ii) Sei I ein Intervall in $\mathbf{R}^n$ (offen oder abgeschlossen).
$v(I) := \prod_{i=1}^{n}(\beta_i - \alpha_i)$ heißt das **Volumen** von I. (Es kann also als „Volumen eines n-dimensionalen Quaders" interpretiert werden). Wir definieren ferner $v(\emptyset) := 0$.

(iii) Eine Menge $E = \{I_1, \ldots, I_r\}$ von offenen Intervallen heißt eine **Einteilung** von $[a, b]$, wenn $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{I}_i$ und die I_i paarweise disjunkt sind.

(iv) Seien E, $E^{'}$ Einteilungen von $[a,b]$. $E = \{I_1, \ldots, I_r\}$ heißt **feiner** als $E^{'} = \{I_1^{'}, \ldots, I_S^{'}\}$, geschrieben $E \subset E^{'}$, wenn $\bigwedge_{i=1}^{r} \bigvee_{j} I_r \subset I_j^{'}$. (Im Falle $n = 1$ bedeutet das: Jeder Teilungspunkt von $E^{'}$ ist auch Teilungspunkt von E).

(v) $t : [a,b] \to \mathbf{R}$ heißt **Treppenfunktion** auf $[a,b]$, wenn eine Einteilung $E = \{I_1, \ldots, I_r\}$ von $[a,b]$ existiert, daß $\bigwedge_{i=1}^{r} t|_{I_i} = c_i = \text{const.}$ ist.

(vi) $S_{[a,b]_E}(t) := \sum_{i=1}^{r} c_i v(I_i)$ heißt das **Integral** von t über $[a,b]$.

(vii) Jede Treppenfunktion $\tilde{t}$ auf $[a,b]$ wird zu einer auf ganz $\mathbf{R}^n$ definierten Funktion $t : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ fortgesetzt:

$$t(x) := \begin{cases} \tilde{t}(x) & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{für } x \notin [a,b] \end{cases}$$

Diese erweiterte Treppenfunktion t hat dann dasselbe Integral wie $\tilde{t}$: $S_E(t) = S_{[a,b]_E}(\tilde{t})$.

8.2 Bemerkungen :

(i) Das Integral einer Treppenfunktion t hängt nicht von $[a,b]$ oder E ab, sondern nur von t.
Denn: Seien $[a,b]$, $[a^{'}, b^{'}]$ und $E = \{I_1, \ldots, I_r\}$, $E^{'} = \{I_1^{'}, \ldots, I_s^{'}\}$ zu t passend gegeben.

(*) $\{I_i \cap I_j^{'} : i = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, s\}$ bildet dann eine gemeinsame Verfeinerung der Einteilungen $E, E^{'}$. Wir lassen die leeren Mengen in (*) weg und erhalten eine Einteilung $E^{''} := \{I_k^{''} : k = 1, \ldots, u\}$ von $[a^{''}, b^{''}]$, wobei $\alpha_k^{''} := \max\{\alpha_i, \alpha_j^{'}\}$, $\beta_k^{''} := \min\{\beta_i, \beta_j^{'}\}$ gewählt ist. Es ist t außerhalb von $[a^{''}, b^{''}]$ Null.

Überlegen Sie sich, daß sich $S(t)$ beim Übergang zu einer Verfeinerung nicht ändert!

(ii) Die Menge $\mathcal{T}$ der Treppenfunktionen des $\mathbf{R}^n$ ist ein $\mathbf{R}$-Vektorraum. Das Integral ist eine lineare Abbildung $S : \mathcal{T} \to \mathbf{R}$ (eine sog. **Linearform** oder ein **lineares Funktional**).

Für $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ sagen wir: $t_1 \leq t_2$, wenn $t_1(x) \leq t_2(x)$ für alle $x \in \mathbf{R}^n$. $(\mathcal{T}, \leq)$ ist im Sinne von 2.30 eine geordnete Menge.

(iii) $t \in \mathcal{T}, t \geq 0 \to S(t) \geq 0$

$t_1 \leq t_2 \to S(t_1) \leq S(t_2)$

Das Integral ist also nichtnegativ, monoton wachsend.

8.3 Definition : $M \subset \mathbf{R}^n$ heißt eine **Lebesguesche Nullmenge** oder eine **Menge vom Lebesgue-Maß Null**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine abzählbare Familie $\{I_\nu\}$ offener Intervalle mit $M \subset \bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} I_\nu$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} v(I_\nu) < \varepsilon$ existiert.

Von einer Eigenschaft, die auf $\mathbf{R}^n$ mit Ausnahme einer Lebesgueschen Nullmenge gilt, sagen wir, daß sie **fast überall** gilt.

8.4 Bemerkungen :

(i) M abzählbar $\to M$ ist vom Maß 0
Denn: Schreibe $M = \{m_1, m_2, \ldots\}$. Wähle $I_i =]a_i, b_i[$ um m_i so, daß $v(I_i) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. Dann ist $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v(I_i) < \varepsilon \sum\limits_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^i = \varepsilon$.

(ii) Jede Vereinigung $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ abzählbar vieler Mengen M_i vom Maß 0 ist vom Maß 0.
Denn: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir zu M_i jeweils $\varepsilon_i^{'} = \frac{\varepsilon}{2^i}$. Da M_i vom Maß 0 ist, existiert $\{I_{i_\nu}\}$ mit $\sum\limits_{\nu} v(I_{i_\nu}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{I_{i_\nu}\}$ ist nach 1.33 abzählbar und wie unter (i) ist $\sum\limits_{i,\nu} v(I_{i_\nu}) < \varepsilon$.

(iii) Jede $(n-1)$-dimensionale Randhyperfläche eines n-dimensionalen Intervalls $[a, b]$ ist vom Maß 0.
Denn: Eine $(n-1)$-dimensionale Randhyperfläche erhalten wir durch $\xi_j = \alpha_j$ (oder β_j) für ein j und $\alpha_i \leq \xi_i \leq \beta_i$ für $i \neq j$, also läßt sie sich mit zwei offenen Quadern
$](\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j - \varepsilon, \alpha_j, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \alpha_j + \varepsilon, \ldots, \beta_n)[$ oder
$](\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \beta_j - \varepsilon, \alpha_j, \ldots, \alpha_n), (\beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_j + \varepsilon, \ldots, \beta_n)[$
der Volumina $2\varepsilon V_{n-1}$ überdecken.

8.5 Definitionen : Sei $[a,b] \subset \mathbf{R}^n$, $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ beschränkt. $E = \{I_1, \ldots, I_r\}$ sei ein Element aus der Menge $\mathcal{E}$ aller Einteilunge von $[a,b]$. Ferner sei

$$\underline{t}_{f,E}(x) := \begin{cases} \inf\{f(x) : x \in \overline{I}_i\} & \text{für } x \in I_i \\ f(x) & \text{für } x \in \overline{I}_i \setminus I_i \\ 0 & \text{für } \textit{sonstige} \end{cases}$$

und

$$\overline{t}_{f,E}(x) := \begin{cases} \sup\{f(x) : x \in \overline{I}_i\} & \text{für } x \in I_i \\ f(x) & \text{für } x \in \overline{I}_i \setminus I_i \\ 0 & \text{für } \textit{sonstige} \end{cases}$$

(i) $\underline{S}_{[a,b]}f := \sup\{S(\underline{t}_{f,E}) : E \in \mathcal{E}\}$ heißt das **Unterintegral** von f. $S(\underline{t}_{f,E})$ ist die sogenannte **Untersumme** von f bezüglich E.

(ii) $\overline{S}_{[a.b]}f := \inf\{S(\overline{t}_{f,E})\}$ heißt **Oberintegral**, $S(\overline{t}_{f,E})$ die **Obersumme**.

(iii) f heißt **Riemann-integrierbar** über $[a,b]$, wenn $\underline{S}f = \overline{S}f =:$ $\int_{[a,b]} f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \ldots d\xi_n =: \int_a^b f$ gilt. Letzterer Wert wird das **Riemannsche Integral** genannt.[2]

(iv) Die **Maschenweite** der Einteilung $E = \{I_k : k = 1, \ldots, r\}$ wird definiert als $|E| := max\{d(I_k) : k = 1, \ldots, r\}$, wobei $d(I_k) := sup\{||x-y|| : x, y \in I_k\}$ der sog. **Durchmesser** von $d(I_k)$ ist.

8.6 Bemerkungen :

(i) $\underline{S}_{[a,b]}f$ und $\overline{S}_{[a,b]}f$ existieren. Es gilt $\underline{S}f \leq \overline{S}f$.
Denn: Nach 8.5 ist f beschränkt, also existieren nach 3.3 $\inf\{f(x) : x \in \overline{I}_i\}$ und somit $\underline{t}_{f,E}(x)$. Ebenso $\underline{S}_{[a,b]}f$ bzw. $\overline{S}_{[a,b]}f$. Da nach Konstruktion $\underline{t}_{f,E} \leq f \leq \overline{t}_{f,E'}$ für alle $E, E' \in \mathcal{E}$ gilt, ist wegen 8.2 (iii) $S(\underline{t}_{f,E}) \leq S(\overline{t}_{f,E'})$, also $\underline{S}f \leq \overline{S}f$.

(ii) Wenn f auf $[a,b]$ beschränkt ist, so existiert eine Folge $\{E_\nu\}$ von Einteilungen von $[a,b]$ so, daß $E_{\nu+1} \subset E_\nu$, $\lim\limits_{\nu\to\infty} |E_\nu| = 0$ und $\lim\limits_{\nu\to\infty} S(\underline{t}_{f,E_\nu}) = \underline{S}_{[a,b]}f$ gelten. Analoge Aussage für $\overline{S}_{[a,b]}f$.

[2]Riemann beginnt 1854 in seiner Arbeit Über trigonometrische Summen mit der systematischen Untersuchung über die Integrierbarkeit beschränkter Funktionen. Die Definition mittels Ober-und Untersummen wird von Darboux geleistet.

Bernhard Riemann* *(1826 - 1866)

Gaston Darboux* *(1842 - 1917)

8.7 Satz : $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig $\to f$ Riemann integrierbar auf $[a, b]$.

8.8 Satz : Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar auf $[a, b]$, wenn sie auf $[a, b]$ fast überall stetig ist.[3]
Beweis: Z. B. bei T. M. Apostol, Mathematical Analysis. Addison-Wesley, Reading, Mass. 1974, Thm. 7.48.

8.9 Beispiel einer nicht Riemann-integrierbaren Funktion :

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbf{Q} \\ 0 & \text{für } x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

ist auf $[a, b] \subset \mathbf{R}$ für $a \neq b$ nicht Riemann-integrierbar.
Denn: Für jede Einteilung E gibt es Zwischenpunkte $\xi_i \in I_i$ mit $f(\xi_i) = 1$ und Zwischenpunkte $\xi_i' \in I_i$ mit $f(\xi_i') = 0$. Also ist $\underline{S}f = 0$, $\overline{S}f = v[a, b]$.

8.10 Satz : Das Riemannsche Integral ist ein lineares Funktional auf dem $\mathbf{R}$-Vektorraum der über $[a, b]$ Riemann-integrierbaren Funktionen. Ist $f(x) \geq 0$ auf $[a, b]$, so ist $\displaystyle\int_{[a,b]} f(x)\, dx \geq 0$.
Beweis:

(I) f, g Riemann-integrierbar auf $[a, b] \to f+g$ dort Riemann-integrierbar.
Denn: Da $\underline{S}f$ die kleinste obere Schranke ist, gilt $\displaystyle\bigwedge_{\epsilon>0} \bigvee_{\underline{t}f, \underline{t}g} S(\underline{t}_f) \geq$

[3] 1875 von Darboux bewiesen.

$\underline{S}_f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad S(\underline{t}g) \geq \underline{S}g - \frac{\varepsilon}{2}$. Also gilt $\underline{S}f + \underline{S}g - \varepsilon \leq S(\underline{t}f + \underline{t}g) \leq \underline{S}(f+g) \leq \overline{S}(f+g) \leq \overline{S}f + \overline{S}g$.

(II) Entsprechend I wird $\int \lambda f = \lambda \int f$ bewiesen.

(III) Die letzte Behauptung ist unmittelbar klar.

8.11 Folgerung : Seien f, g integrierbar auf $[a, b]$ mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

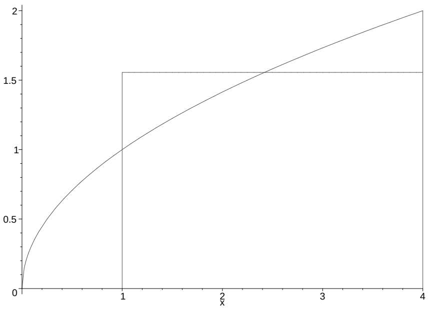
8.12 Folgerung : f Riemann-integrierbar auf $[a, b]$; $m, M \in \mathbf{R}$ mit $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b] \to mv[a, b] \leq \displaystyle\int_a^b f\ dx \leq Mv([a, b])$

Denn: $8.11 \to \displaystyle\int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b M\ dx.$

Die folgenden Sätze zeigen die Eigenschaft der Integration als Mittelwertbildung. Diese Eigenschaft wird in den Anwendungen, z.B. in der Stochastik, vielfach genutzt.

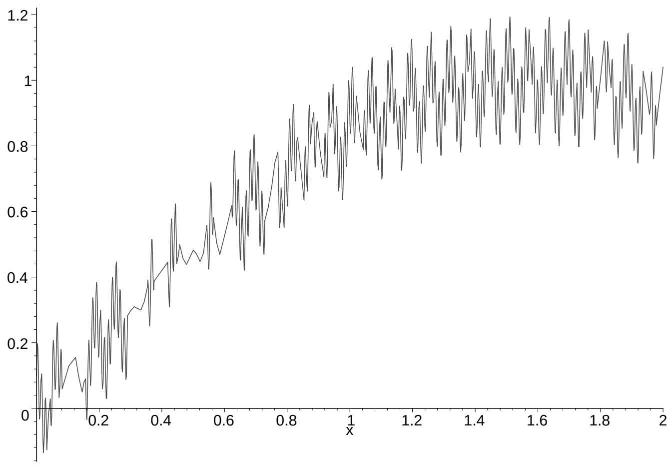
8.13 Satz (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung) : Sei $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig, $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Dann existiert $x_0 \in [a, b]$ mit $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = f(x_0)v([a, b])$.

Beweis: $\inf\{f(x) : x \in [a, b]\} =: m \leq \frac{1}{v([a,b])}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leq \sup\{f(x) : x \in [a, b]\} =: m$ nach 8.12.
Da f stetig auf $[a, b]$ ist, gilt nach 5.19: $m, M \in f([a, b])$. Also existiert nach 5.23 $x_0 \in [a, b]$ so, daß $\frac{1}{v([a,b])}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = f(x_0)$ ist.

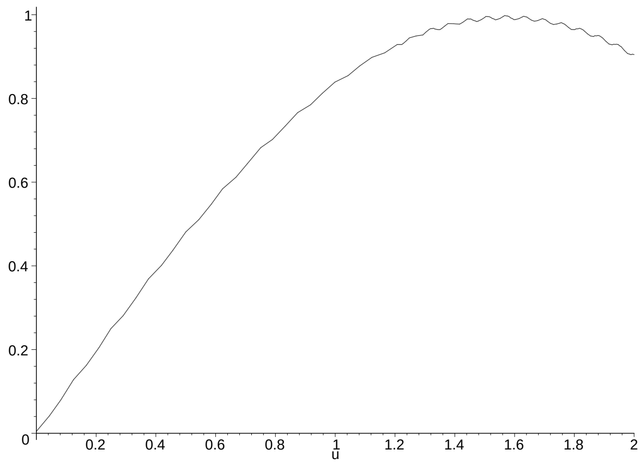


$\frac{1}{v([a,b])}\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ ist der Mittelwert der Funktion f über $[a, b]$. Dies kann auch genutzt werden, um eine Funktion zu glätten. Das folgende Maple-Arbeitsblatt ist nach W. Werner, Mathematik lernen mit Maple, gestaltet.

Durch die Funktion f seien Meßfehler simuliert:
$> f := \quad x \quad -> \; sin(x) + 1/10 * sin(500 * x) + 1/10 * cos(100 * x)$



Die Glättung erfolgt nun mit Hilfe des Mittelwertsatzes:
$g := \quad (x, t) \quad -> \; Int(\, f(g),\; y = x - t \,..\, x + t\,)/(2 * t) :$
$plot(\, g(u, 0.2),\; u = 0..2\,);$



Meist werden jedoch in der Praxis noch etwas kompliziertere Methoden angewandt, wie zum Beispiel die Filterung verrauschter Signale mittels des Faltungsintegrals (siehe Teil 3).

8.14 Satz (2. Mittelwertsatz der Integralrechnung) : Es seien f, g stetig auf $[a,b]$ und es sei $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Dann existiert $x_0 \in [a,b]$ mit $\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(x_0)\int_a^b g(x)\ dx$.
Beweis: Wieder seien m, M die Extremalwerte von f auf $[a,b]$. Wegen $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ gilt $m\int_a^b g(x)\ dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\ dx \leq M\int_a^b g(x)\ dx$.
Nach 8.10 gilt $\int_a^b g(x)\ dx \geq 0$. Wenn $= 0$, so kann x_0 beliebig gewählt werden. Andernfalls dividieren wir die Ungleichung durch $\int_a^b g(x)\ dx > 0$. Der Zwischenwertsatz 5.23 ergibt dann $f(x_0) = \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\ dx}{\int_a^b g(x)\ dx}$.

8.15 Satz : f integrierbar auf $[a,b] \to |\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx \leq v([a,b])\sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $\sup\{f(x) : x \in [a,b]\} =: ||f||$
$||\ ||$ ist die sogenannte **Supremumsnorm**.
Beweis:

(I) Zeige: $|f(x)|$ ist integrierbar.
Betrachte:

$$f_-(x) := \begin{cases} -f(x) & \text{für } f(x) < 0 \\ 0 & \text{für } sonstige \end{cases}$$

$$f_+(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } f(x) > 0 \\ 0 & \text{für } sonstige \end{cases}$$

f integrierbar $\to \exists \underline{t}, \overline{t} : S(\overline{t} - \underline{t}) < \varepsilon$. Es ist $\underline{t}_+ \leq f_+ \leq \overline{t}_+$,
$S(\overline{t}_+ - \underline{t}_+) \leq S(\overline{t} - \underline{t}) < \varepsilon$ also f_+ integrierbar, analog f_- integrierbar.
Also $|f| = f_+ + f_-$ integrierbar.

(II) $-f(x) \leq |f(x)|\ -\int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$
$f(x) \leq |f(x)|\ \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$, also $|\int_a^b f(x)\ dx| \leq \int_a^b |f(x)|\ dx$

Von nun ab im gesamten Paragraphen: $[a, b] \subset \mathbf{R}$ (also eindimensionale Integrale).

8.16 Bemerkung : Sei $a < b < c$, $f : [a, c] \to \mathbf{R}$. Dann gilt: f integrierbar auf $[a, c] \leftrightarrow f$ integrierbar auf $[a, b]$ und auf $[b, c]$. Und in diesem Fall gilt: $\int_a^b f(x)\,dx \neq \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Denn: f integrierbar auf $[a, c] \to \exists \underline{t}_f, \overline{t}_f : \int_a^c \overline{t} - \underline{t} < \varepsilon$

Wegen $\int_a^c \overline{t} - \underline{t} = \int_a^b + \int_b^c$ ist $\int_a^b \overline{t} - \underline{t} < \varepsilon$, $\int_b^c \overline{t} - \underline{t} < \varepsilon$, also ist f integrierbar auf $[a, b]$ und $[b, c]$ etc.

8.17 Definition : Sei f integrierbar auf $[b, a]$. Wir setzen $\int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$, also insbesondere folgt daraus: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

8.18 Satz : Sei $I \Subset \mathbf{R}$ zusammenhängend, und sei $f : I \to \mathbf{R}$ stetig. Dann ist für festes $a \in I$ die Funktion $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ auf I differenzierbar, und es ist $F'(x) = f(x)$.

Beweis: $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt) = \frac{1}{h}(\int_x^{x+h} f(t)\,dt$. Nach 8.13 $\exists x_h \in [x, x+h]$ (bzw. für $h < 0 \quad \in [x+h, x]$), so daß $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x_h)h$ ist.

Also $F'(x) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} f(x_h) = f(x)$.

8.19 Definition : Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbf{R}$ heißt eine **Stammfunktion** von $f : I \to \mathbf{R}$, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt. $\int_a^x f(t)\,dt +$ const. heißt ein **unbestimmtes Integral** von f, oft auch einfach als $\int f(x)\,dx$ geschrieben. (Die Begründung für die Schreibweise „$\ldots +$ const.“ erfolgt in der nächsten Bemerkung, (ii)).

8.20 Bemerkungen :

(i) 8.18 besagt: Jede auf I stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion.

(ii) Sei F Stammfunktion von $f : I \to \mathbf{R}$. $G : I \to \mathbf{R}$ ist genau dann ebenfalls eine Stammfunktion von f, wenn $G - F =$ const. ist. Das unbestimmte Integral von f ist also die Klasse der Stammfunktionen von f.
Denn: Wenn G eine Stammfunktion von f ist, so ist $G^{'} = F^{'} = f$, also $(G - F)^{'} = 0$ auf I, also nach 7.19 (iii) $G - F =$ const. Wenn umgekehrt $G - G =$ const. ist, so gilt $G^{'} = F^{'} = f$, also ist G auch eine Stammfunktion von f.

8.21 Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung) :
Sei $f : I \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt für $a, b \in I$: $\displaystyle\int_a^b f(x) = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b$.

Beweis: Für die spezielle Stammfunktion $F_0(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ aus 8.18 gilt: $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = F_0(b) - 0 = F_0(b) - F_0(a)$. Für jede andere Stammfunktion F von f gilt nach 8.20 (ii): $F(x) - F_0(x) =$ const., also gilt die Behauptung.

8.22 Bemerkungen :

(i) Sei $x > 0$ und sei $F(x) := \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$. Dann ist $F(x) = ln\, x$.
Denn: $f(t) := \frac{1}{t}$ ist auf $[1, x]$ stetig. Nach 8.18, 8.19 ist also $F(x)$ eine Stammfunktion von f, und es gilt $F'(x) = \frac{1}{x}$. Also gilt $(F \circ exp)'(x) = \frac{1}{exp\, x} exp\, x = 1$, mithin $(F \circ exp)(x) = x + const$. Wegen $(F \circ exp)(0) = F(1) = 0$ gilt $const = 0$. Also gilt $F(x) = ln\, x$.

(ii) Erst mit (i) ist das Vorgehen in 7.11 gerechtfertigt. Aus der Punktsymmetrie von $\frac{1}{x}$ folgt: $\boxed{\displaystyle\int \frac{dx}{x} = ln|x| \quad (x \neq 0)}$

(iii) Einige Grundintegrale:

8.23 Satz (Substitution) :

8.24 Beispiele :

8.25 Satz (Partielle Integration) :

8.26 Beispiele :

8.27 Satz von der Partialbruchzerlegung : Sei K ein Körper und sei $g(x) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x)^{\alpha_i} \in K[x]$ die Zerlegung des Polynoms $g(x)$ in irreduzible Elemente gemäß 2.20 (iii). Ferner sei $r(x) \in K[x]$ mit Grad $r(x) <$ Grad $g(x)$. Dann läßt sich $\frac{r(x)}{g(x)}$ als Summe von Partialbrüchen darstellen, deren Nenner vom Typ $p_i(x)^{\beta_i}$ mit $\beta_i \leq \alpha_i$ sind und deren Zähler einen kleineren Grad als das jeweilige $p_i(x)$ des Nenners haben.
Beweis: B.L. van der Waerden, Algebra I, § 36.

8.28 Bemerkungen :

(i) Der kleinste Körper, der den Polynomring $K[x]$ umfaßt, heißt **Körper** $K(x)$ **der rationalen Funktionen** über K. Seine Elemente sind vom Typ $\frac{f(x)}{g(x)}$ mit $f(x), g(x) \in K[x]$, $g(x) \neq 0$ und heißen **rationale Funktionen** in x.

(ii) Jede rationale Funktion $\frac{f(x)}{g(x)} \in K(x)$ läßt sich durch Anwendung des Divisionsalgorithmus 2.19 (iii) in die Gestalt $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ mit $q(x), r(x) \in K[x]$ und Grad $r <$ Grad g oder $r = 0$ überführen.

(iii) Über $\mathbf{R}$ läßt sich also jede rationale Funktion aus $\mathbf{R}(x)$ in eine Summe aus einem Polynom plus einer Summe aus Partialbrüchen der Typen $\frac{\gamma_i x+\delta_i}{(x^2+\eta_i x+\zeta_i)^{\beta_i}}$, $\frac{\rho_j}{(x+\sigma_j)^{\beta_j}}$ überführen (zu den irreduziblen Elementen von $\mathbf{R}[x]$ vergleiche 2.20 (ii)).

(iv) Ausführung der Partialbruchzerlegung von $\frac{r(x)}{g(x)}$ über $\mathbf{R}$: Zunächst die Nullstellen von $g(x)$ ermitteln und damit die Zerlegung von $g(x)$ in irreduzible Faktoren herstellen. Dann werden die Partialbruch-Ansätze gemäß 8.27, 8.28 (iii) mit unbestimmten Zählern hingeschrieben und die Zähler z.B. durch **Koeffizientenvergleich** bestimmt.

8.29 Die Integration der rationalen Funktionen : kann also mittels Partialbruchzerlegung auf folgende Probleme zurückgeführt werden:

I) Integration eines Polynoms

II) $\int \frac{dx}{x-\beta} = \ln|x-\beta|$

III) $\int \frac{dx}{(x-\beta)^n} = \frac{1}{1-n}(x-\beta)^{1-n}$ $(n > 1)$

IV) $\int \frac{\gamma x+\delta}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx$ $(n \geq 1)$

a) $\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$ Durch quadratische Ergänzung wie in 8.26 (iv) in $\gamma \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}$ überführen. Dann:

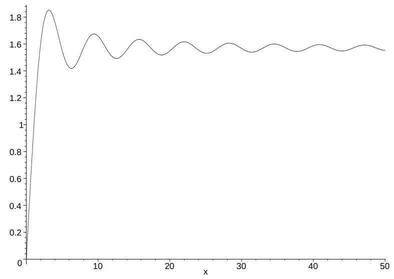
- Wenn $n = 1$ ist: $\int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan t$ (siehe 8.22 (iii))
- Wenn $n > 1$ ist: $\mathcal{I}_n := \int \frac{dt}{(t^2+1)^n} = t \cdot \frac{1}{(t^2+1)^n} + 2n \int \frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} dt$
  Wegen $\frac{t^2}{(t^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{(t^2+1)^n} - \frac{1}{(t^2+1)^{n+1}}$ ist $\mathcal{I}_n = \frac{t}{(t^2+1)^n} + 2n\mathcal{I}_n - 2\mathcal{I}_{n+1}$. Also $\mathcal{I}_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\mathcal{I}_n + \frac{1}{2n}\frac{t}{(t^2+1)^n}$.

b) $\int \frac{x}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx - \frac{1}{2}\alpha \int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}$ siehe a)
$\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} dx = \int \frac{dt}{t^n}$ mit $t = x^2 + \alpha x + \beta$, $dt = (2x + \alpha)dx$

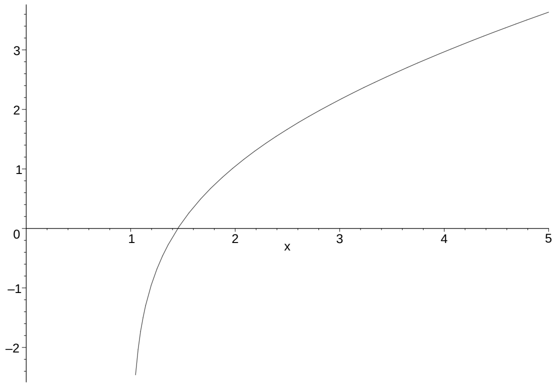
8.30 Integration weiterer Funktionenklassen :

8.31 Bemerkung : Viele elementare Funktionen sind nicht geschlossen integrierbar, zum Beispiel e^{-x^2}, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. Jedoch ist es keinesfalls einfach, diesen Tatbestand präzise zu formulieren, geschweige denn zu beweisen.
Oft führt man dann die unbestimmten Integrale als neue Funktionen ein:

(i) $\mathrm{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ **Integralsinus**



(ii) $\mathrm{li}(x) := \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ **Integrallogarithmus** [4]



[4]Die Funktion approximiert die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen $\leq x$. So erhält man z. B.

(iii) In der Stochastik spielt das **Fehlerintegral** $\phi(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ eine wichtige Rolle.

li(100000) = 9629.8 , während $\pi(100000) = 9592$ beträgt.