Kapitel 9

Lineare Gleichungssysteme

9.1 Definitionen : Sei $l \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$. $\mathrm{Rg}\, l := \mathrm{Dim}\, l(V)$ heißt der **Rang** von l. Sei $A \in M_{m,n}(K)$. Die Maximalzahl linear unabhängiger Spalten von A heißt der **Spaltenrang** von A. Analog wird der **Zeilenrang** definiert.

9.2 Bemerkungen : Es seien V, V' endlich-dimensionale K-Vektorräume und B, B' Basen von V bzw. V'.

(i) Es ist $\mathrm{Rg}\, l =$ Spaltenrang von $M_{B,B'}(l)$.
Denn: Die Spalten von $M_{B,B'}(l)$ sind die Koordinatenvektoren der $l(b_j)$, $b_j \in B$, – bezogen auf die Basis B' (6.10, Slogan). l bildet ein Erzeugendensystem von V stets auf ein Erzeugendensystem von $l(V)$ ab. Also ist jede maximal linear unabhängige Teilmenge von $\{l(b_j)\}$ eine Basis von $l(V)$. Also gilt die behauptete Gleichheit.

(ii) Es gilt genau dann $\mathrm{Rg}\, l = \mathrm{Dim}\, V$, wenn l injektiv ist. (klar)

(iii) Sei $A \in M_{n,n}(K)$. Dann gilt: A Einheit in $M_{n,n}(K) \leftrightarrow$ Spaltenrang $A = n$.
Denn: Betrachte die durch A bezogen auf die Standardbasis definierte lineare Abbildung $l : K^n \to K^n$. Es gilt: A Einheit $\leftrightarrow$ l Automorphismus $\underset{(ii)}{\leftrightarrow}$ $\mathrm{Rg}\, l = n \underset{(i)}{\leftrightarrow}$ Spaltenrang $A = n$.

> **Slogan:** Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie Höchstrang hat.

(iv) Der Zeilenrang einer Matrix A wird durch sog. **elementare Umformungen** der folgenden Typen (a) bis (d) nicht geändert:

(a) das Vertauschen zweier Zeilen

(b) das Vertauschen zweier Spalten

(c) das Ersetzen der Zeile $A_{(s)}$ durch $A'_{(s)} = A_{(s)} + \lambda A_{(t)}$ $(t \neq s;\, \lambda \in K)$, also das Hinzufügen eines skalaren Vielfachen einer Zeile **zu einer anderen**

(d) das Analogon zu (c) für Spalten, also das Ersetzen der Spalte $A^{(s)}$ durch $A^{(s)'} = A^{(s)} + \lambda A^{(t)}$ $(t \neq s;\, \lambda \in K)$.

Denn: Für (a), (b) ist die Aussage klar, da die Operation nur eine Umnumerierung der Zeilen bzw. der Koordinaten der Zeilenvektoren bewirkt.

Zu (c): Betrachte $U := \langle A_{(1)}, \ldots, A_{(m)} \rangle$, den von den Zeilenvektoren von A erzeugten linearen Teilraum des K^n.
Dann gilt auch $U = \langle A_{(1)}, \ldots, A_{(s-1)}, A_{(s)} + \lambda A_{(t)}, A_{(s+1)}, \ldots, A_{(m)} \rangle$. Die Behauptung für (c) folgt dann unmittelbar aus dem folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz: Eine maximal linear unabhängige Teilmenge eines **Erzeugendensystems** eines Vektorraums U ist stets eine Basis von U.
Beweis: Sei $M = \{m_1, \ldots, m_r\}$ eine maximal linear unabhängige Teilmenge eines Erzeugendensystems von U. Dann gilt $\bigwedge\limits_{m \in l_U M} m = \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i m_i$ mit geeigneten $\alpha_i \in K$. Also ist M auch eine maximal linear unabhängige Teilmenge von U und somit nach 4.7 eine Basis.

9.3 Satz : Wenn $A \in M_{m,n}(K)$ mit $A \neq 0$ ist, so kann A durch endlich viele elementare Umformungen der Typen (a), (b), (c) auf die Gestalt

$$B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & \beta_{22} & \ldots & \ldots & \ldots & \beta_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \beta_{rr} & \ldots & \beta_{rn} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden mit $\beta_{ii} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, r$.

Beweis: Sei nach endlich vielen Schritten eine Form $B_i = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{ii} & \dots & \beta_{in} \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{pmatrix}$ erreicht mit $\beta_{jj} \neq 0$ für alle $j = 1, \dots, i$.

Wenn die letzten Zeilen nur Nullen enthalten, so sind wir fertig. Wenn nicht, so nimm ein von Null verschiedenes Element aus den letzten Zeilen und bringe es durch Operationen vom Typ (a), (b) an die Stelle $(i+1, i+1)$.

Dieses Element heißt wegen seiner folgenden Rolle **Pivotelement**:[1] Durch geeignete Operationen vom Typ (c) stelle man in der $(i+1)$-ten Spalte unterhalb des Pivotelementes lauter Nullen her, man **pivotisiert**. So erhält man B_{i+1}. Spätestens B_m hat die gesuchte Form.

9.4 Satz : Sei $A \in M_{m,n}(K)$. Dann gilt: Zeilenrang A = Spaltenrang A, und diese Zahl definieren wir als **Rang** A.

Beweis: In 8.2 (iv) wurde gezeigt, daß der Zeilenrang von A durch elementare Umformungen nicht geändert wird. Wenn also A gemäß 9.3 auf die Gestalt B gebracht wird, ändert sich der Zeilenrang nicht: Zeilenrang A = Zeilenrang B. Analoges gilt für den Spaltenrang. Zu zeigen bleibt also: Zeilenrang B = Spaltenrang $B = r$ (r wie in 9.3).

I) Wir zeigen zunächst: Zeilenrang $B = r$. Mehr als r Zeilenvektoren von B sind stets linear abhängig, da sie eine Nullzeile enthalten. Andererseits sind die Zeilen $B_{(1)}, \dots, B_{(r)}$ linear unabhängig. Denn, wenn $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i B_{(i)} = 0$ ist, so gilt
$\lambda_1 \beta_{11} = 0$
$\lambda_1 \beta_{12} + \lambda_2 \beta_{22} = 0$
$\vdots$
$\lambda_1 \beta_{1r} + \lambda_2 \beta_{2r} + \dots + \lambda_r \beta_{rr} = 0.$
Da $\beta_{11} \neq 0$ ist, ist $\lambda_1 = 0$, also $\lambda_2 \beta_{22} = 0$, also $\lambda_2 = 0$, also $\dots$, also $\lambda_r = 0$.

II) Wir zeigen nun: Spaltenrang $B = r$. Zunächst überlege man analog zu I), daß die Spalten $B^{(1)}, \dots, B^{(r)}$ linear unabhängig sind. Also ist Spaltenrang $B \geq r$. Andererseits sind die Koordinaten aller Spaltenvektoren ab Koordinatenindex $r+1$ sämtlich Null, also liegen $B^{(1)}, \dots, B^{(n)}$ in einem r-dimensionalen Raum, also gilt wegen 9.2 (i): Spaltenrang $B \leq r$.

[1] pivot frz. Angelpunkt, also der Punkt um den sich alles dreht

Damit ist der Satz bewiesen.

9.5 Bemerkungen :

(i) 9.2 (iv) gilt auch über Ringen, 9.3 gilt auch über euklidischen Ringen, 9.4 gilt auch über nullteilerfreien Ringen. Also insgesamt: 9.2 (iv), 9.3 und 9.4 gelten auch über euklidischen Ringen.

(ii) Beispiel für die Durchführung des Algorithmus 9.3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \underset{(c)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\longrightarrow}{\text{über}}\ \mathbf{R}\, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{über } \mathbb{Z}\text{:} \underset{(c)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{(a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also $\operatorname{Rg} A = 2$.

9.6 Definitionen : Es seien $A \in M_{m,n}(K)$, $x \in K^n$, $b \in K^m$.

(i) $Ax = b$ heißt ein **lineares Gleichungssystem**,
auch $\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{\kappa\nu}\xi_\nu = \beta_\kappa$ $(\kappa = 1, \ldots, m)$ geschrieben.

(ii) Ist $b = 0$, so heißt das System **homogen**, andernfalls **inhomogen**.

(iii) A heißt die **Koeffizientenmatrix**.

(iv) $(A|b)$ heißt die **erweiterte Matrix** des Systems.

(v) $\xi_1, \ldots, \xi_n$ heißen die **Unbekannten**.

9.7 Satz : Sei $A \in M_{m,n}(K)$. Die Lösungen des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ bilden einen linearen Teilraum von K^n der Dimension $n - \operatorname{Rg} A$, nämlich Kern A.
Beweis: Die Lösungsvektoren von $Ax = 0$ bilden einen K-Vektorraum, denn

der Lösungsraum ist Kern A, und das ist nach 6.2 (v) ein K-Vektorraum. Nach 6.7 ist $\operatorname{Dim}\operatorname{Kern} A = \operatorname{Dim} K^n - \operatorname{Dim}\operatorname{Bild} A = n - \operatorname{Rg} A$.

9.8 Satz : Ist das inhomogene Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar, so ist die Lösungsmenge eine Nebenklasse $x_0 + \operatorname{Kern} A \subset (K^n, +)$, wobei x_0 eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist.
Beweis: Sei x_0 Lösung von $Ax = b$, d.h. $Ax_0 = b$. Dann gilt: $Ax_1 = b \leftrightarrow Ax_0 = Ax_1 \leftrightarrow A(x_1 - x_0) = 0 \leftrightarrow x_1 - x_0 \in \operatorname{Kern} A \leftrightarrow x_1 \in x_0 + \operatorname{Kern} A$

9.9 Bemerkung : Eine Nebenklasse eines linearen Teilraums wird ein **affiner Teilraum** des Vektorraums genannt.

Anschauliche Erläuterung des Begriffes affiner Teilraum: Ein linearer 2-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{R}^3$ kann geometrisch als eine Ebene durch $(0, 0, 0)$ veranschaulicht werden, ein affiner 2-dimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^3$ durch eine parallel verschobene solche Ebene.

9.10 Satz : $Ax = b$, $b \neq 0$, ist genau dann lösbar, wenn $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b)$ ist.
Beweis: Wenn $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A|b)$ ist, so ist die Spalte b von den Spalten von A linear abhängig. Also gilt $b = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A^{(i)}$ für gewisse $\xi_i \in K$, und somit ist $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^t$ eine Lösung von $Ax = b$. Ebenso überlegt man sich die andere Richtung.

9.11 Gaußscher Algorithmus : (Lösung von $Ax = b$) Er besteht aus zwei Schritten:

I) **Vorwärtselimination:** Stelle mit Hilfe von Transformationen der beiden Typen (a) und (c) eine sogenannte **Zeilenstufenform** her: (Im folgenden Schema symbolisieren $\bullet$ von Null verschiedene und * beliebige Elemente).

$$
\begin{array}{ccccccccccc|c}
 & & & & & & & & & & & \tilde{\beta} \\
\bullet & * & * & * & & \ldots & * & * & & \ldots & * & \tilde{\beta}_1 \\
0 & 0 & 0 & \bullet & * & \ldots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \ldots & * & * & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \bullet & * & \ldots & * & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \\
\vdots & & & & & \ldots & & & \ldots & \vdots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \tilde{\beta}_m
\end{array}
$$

Die „Länge“ (horizontale Ausdehnung) der Stufen kann natürlich unterschiedlich zu der in der Skizze sein, „Stufenhöhe“ ist aber stets eine

Einheit. Unterhalb der Treppe befinden sich nur Nullen, oberhalb nur Punkte und Sterne, und zwar die Punkte genau nächst den Scheiteln der rechten Winkel der Treppe.

Die beschriebene Gestalt erzielt man mit dem in 9.3 beschriebenen Algorithmus. Nur wird auf die Spaltenvertauschungen (b) verzichtet. Die Vorwärtselimination überführt $Ax = b$ in ein System $\tilde{A}x = \tilde{\beta}$ mit derselben Lösungsmenge. Im zweiten Teil des Gaußschen Algorithmus wird daher das auf Zeilenstufenform gebrachte System gelöst, und zwar durch

II) **Rücksubstitution:** Die Unbekannten ξ_i, die zu den Spalten ohne einen Punkt gehören, liefern die **freien Parameter** $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-\operatorname{Rg} A}$ der Lösung. Die Rücksubstitution von unten nach oben durchführen!

Wir illustrieren das am folgenden Beispiel:
$\xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3 + 4\xi_4 = \beta_1$
$2\xi_3 + \xi_4 = \beta_2$
$\xi_4 = \lambda_1$, $\xi_2 = \lambda_2$, $\xi_3 = \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\lambda_1$, $\xi_1 = \beta_1 + 2\lambda_2 - 3(\frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\lambda_1) - 4\lambda_1 = \beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2 - \frac{5}{2}\lambda_1 + 2\lambda_2$, also

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} \frac{-5}{2} \\ 0 \\ \frac{-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 - \frac{3}{2}\beta_2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\beta_2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

9.12 Bemerkungen :

(i) Wenn eine Matrix $A \in M_{n,n}(K)$ eine Einheit des Matrizenringes ist, so besitzt sie nach 2.18 (vi) eine eindeutig bestimmte **Inverse** A^{-1}. Der Gaußsche Algorithmus liefert uns mit einer kleinen Modifikation ein Verfahren zur Ermittlung der inversen Matrix.

Invertieren durch „Mitführen der Einheitsmatrix“:
Wir lösen die Gleichungssysteme $Ax_1 = e_1, \ldots, Ax_n = e_n$ gleichzeitig, indem wir mittels elementarer Umformungen vom Typ (a), (c) und neuerdings (c)*: Multiplikation einer Zeile mit einem von Null verschiedenen Körperelement die Matrix A in die Einheitsmatrix überführen. Da $x_i = A^{-1}e_i = (A^{-1})^{(i)}$ ist, ist die neue rechte Seite $\tilde{e_i}$ jeweils die i-te Spalte von A^{-1}.

Beispiel: Zu invertieren sei $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Wir schreiben im folgenden Schema rechts simultan sämtliche Standardvektoren auf (daher der Name „Mitführen der Einheitsmatrix“).

$$\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Also $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) Die Einheiten des Matrizenrings $M_{n,n}(K)$ bilden eine multiplikative Gruppe, die sogenannte **allgemeine lineare Gruppe** $\mathrm{GL}(n, K)$. (Abkürzung aus dem Englischen: **g**eneral **l**inear group).

9.13 Definitionen : Sei $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n,n}(K)$.

(i) Wir definieren A^*_{ij} als die Untermatrix von A, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A entsteht.

(ii) Die **Determinante** von A, geschrieben $|A|$ oder $\operatorname{Det} A$, definieren wir rekursiv durch:

(I) $\operatorname{Det}(\alpha) = \alpha$ für $n = 1$

(II) $\operatorname{Det} A = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{i\nu}(-1)^{i+\nu} \operatorname{Det} A^*_{i\nu}$ für $n > 1$, sogenannte **Entwicklung nach der i-ten Zeile**.

(iii) Dabei heißt $\operatorname{Det} A^*_{i\nu}$ der **Minor** von A für die Stelle (i, ν) und $(-1^{i+\nu} \operatorname{Det} A^*_{i\nu} =:$ $\operatorname{Adj} \alpha_{i\nu}$ die **Adjunkte** von A für die Stelle (i, ν).

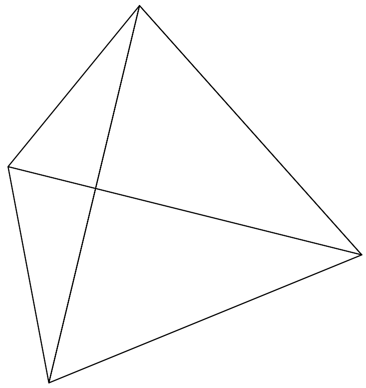
(iv) $A^t := B = (\beta_{ij})$ mit $\beta_{ij} := \alpha_{ji}$ für alle i, j heißt die zu A **transponierte Matrix** oder die an der **Hauptdiagonale** gespiegelte Matrix.

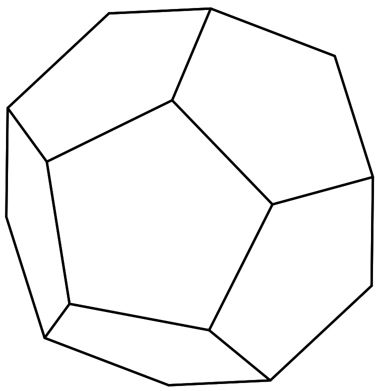
(v) Sei $P \in S_n$ (Def. von S_n in 2.3) in elementfremder Zyklendarstellung gegeben, und sei g die Anzahl der Zyklen gerader Länge dieser Darstellung. Dann heißt $\operatorname{sgn} P := (-1)^g$ das **Signum** von P.

(vi) P heißt **gerade**, wenn $\operatorname{sgn} P = 1$ ist; andernfalls **ungerade**.

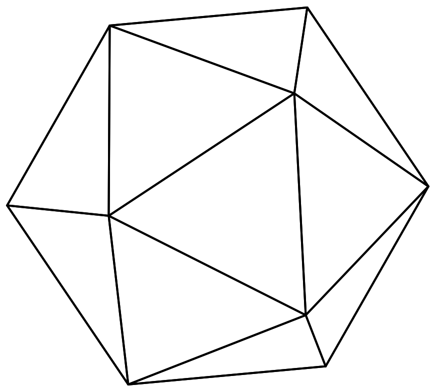
(vii) Die geraden Permutationen aus S_n bilden die sogenannte **alternierende Gruppe** A_n.

Es gelten die folgenden Isomorphien: $A_3 \simeq C_3$, $A_4 \simeq T$, $A_5 \simeq I$, wobei T die Tetraedergruppe und I die Ikosaedergruppe bezeichnen (vgl. 2.3(vii)). Letztere ist auch isomorph zur Drehgruppe vom regulären **Dodekaeder** (Pentagondodekaeder).





Dodekaeder



Ikosaeder

9.14 Rechenregeln für Determinanten :

(i) $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$

(ii) $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33}+\alpha_{21}\alpha_{32}\alpha_{13}+\alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{13}\alpha_{22}\alpha_{31}-$
$\alpha_{12}\alpha_{21}\alpha_{33} - \alpha_{11}\alpha_{23}\alpha_{32}$

(iii) $\operatorname{Det} A^t = \operatorname{Det} A$

(iv) $\operatorname{Det}(\ldots, A^{(i)} + A'^{(i)}, \ldots) = \operatorname{Det}(\ldots, A^{(i)}, \ldots) + \operatorname{Det}(\ldots, A'^{(i)}, \ldots)$

(v) $\operatorname{Det}(\ldots, \lambda A^{(i)}, \ldots) = \lambda \operatorname{Det}(\ldots, A^{(i)}, \ldots)$ für $\lambda \in K$

(vi) $\operatorname{Det}(\ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(j)} = A^{(i)}, \ldots) = 0$
$\operatorname{Det}(\ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(j)}, \ldots) = -\operatorname{Det}(\ldots, A^{(j)}, \ldots, A^{(i)}, \ldots)$

In (iv), (v), (vi) bedeutet das Ellipsen-Token $\ldots$ Identität entsprechender Spalten links und rechts vom Gleichheitszeichen.

(vii) Die Eigenschaften (iv) und (v) drückt man aus durch die Sprechweise: Die Determinante ist eine **Multilinearform**.

Eine Multilinearform mit der Eigenschaft (vi) wird **alternierende** Multilinearform genannt.

(viii) $\operatorname{Det}(\ldots, A^{(i)}, \ldots, A^{(j)}, \ldots) = \operatorname{Det}(\ldots, A^{(i)} + \lambda A^{(j)}, \ldots, A^{(j)}, \ldots)$

(ix) $\operatorname{Det}\begin{pmatrix} \alpha_{11} & * & \ldots & \ldots & * \\ 0 & \ddots & \ldots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & * \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\cdots\alpha_{nn}$

(x) $\operatorname{Det} A = \sum_{P \in S_n} (\operatorname{sgn} P)\alpha_{1P(1)} \ldots \alpha_{nP(n)}$ (**Leibnizsche Definition**)

(xi) Statt der Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile wie in 9.13(ii)(II) ist ebenso die Entwicklung nach der j-ten Spalte möglich:
$\operatorname{Det} A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \operatorname{Adj} \alpha_{ij}$.

Ferner gelten $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \operatorname{Adj} \alpha_{ik} = 0$ für $j \neq k$ sowie $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \operatorname{Adj} \alpha_{kj} = 0$ für $i \neq k$.

(xii) $\operatorname{Det}(AB) = \operatorname{Det} A \operatorname{Det} B$.

Die Eigenschaften (i) bis (xii) sind hier ohne Beweis mitgeteilt. Einige lassen sich leicht nachrechnen. Ansonsten sei auf die Literatur zur Linearen Algebra verwiesen. Dagegen wollen wir die folgenden Aussagen wieder beweisen:

(xiii) Es ist $\operatorname{Det} A \neq 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Rg} A = n$ gilt.
Denn: Wenn $\operatorname{Rg} A = n$ gilt, so ist A nach 9.2 (iii) eine Einheit, also gilt nach (xii) $1 = \operatorname{Det} E = \operatorname{Det} A \operatorname{Det} A^{-1}$, mithin ist $\operatorname{Det} A \neq 0$.
Wenn $\operatorname{Rg} A < n$ gilt, so ist eine Spalte von A eine Linearkombunation der anderen Spalten, so daß nach (viii) eine Nullspalte erzeugt werden kann.Somit ist in diesem Fall $\operatorname{Det} A = 0$.

9.15 Satz (Cramersche Regel) : Sei $A = (\alpha_{ij}) \in M_{n,n}(K)$ mit $\operatorname{Det} A \neq 0$. Dann hat das System $Ax = b$ genau eine Lösung, nämlich $\xi_i = \frac{1}{\operatorname{Det} A} \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \operatorname{Adj} \alpha_{\nu i}$.
Beweis: Wegen $\operatorname{Det} A \neq 0$ gilt $n = \operatorname{Rg} A$, also hat der affine Lösungsraum des vorgelegten Systems die Dimension 0. Die folgende Rechnung zeigt, daß die angegebenen ξ_i die Lösung bilden:
$(Ax)_{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{1}{\operatorname{Det} A} \sum_{j=1}^{n} \beta_\nu \operatorname{Adj} \alpha_{\nu j} = \frac{1}{\operatorname{Det} A} \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \operatorname{Adj} \alpha_{\nu j} = \frac{1}{\operatorname{Det} A} \beta_i \operatorname{Det} A$ (letzteres nach 9.14 (xi)) .

9.16 Folgerung : Sei $A \in GL(n,K)$. Dann ist $A^{-1} = \frac{1}{\operatorname{Det} A} (\operatorname{Adj} \alpha_{ji})$.
Denn: Wir fassen $AA^{-1} = E$ als Gleichungssystem auf: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} \alpha'_{kj} = \delta_{ij}$.
(δ_{ij} ist das sogenannte **Kronecker-Delta** , das durch $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 : i = j \\ 0 : i \neq j \end{cases}$ definiert wird.)
Nach 9.15 gilt für die gesuchten Koeffizienten α'_{kj} der inversen Matrix A^{-1} :
$\alpha'_{kj} = \frac{1}{\operatorname{Det} A} \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{\nu j} \operatorname{Adj} \alpha_{\nu k} = \frac{\operatorname{Adj} \alpha_{jk}}{\operatorname{Det} A}$.

Hier noch ein kurzer Überblick über die geschichtliche Entwicklung:
Schon die Babylonier (2000 v. u. Z.) konnten lineare Gleichungssysteme sehr elegant lösen (siehe Otto Neugebauer: Vorgriechische Mathematik, S. 175ff.)

Bereits im alten China wurde dafür ein allgemeiner Algorithmus namens Fang-cheng entwickelt. Er ist zu finden im 8. Buch der mathematischen Enzyklopädie “Mathematik in 9 Büchern “, die zurückreicht bis ins 2. Jh. v. u. Z., dann im 1. Jh. v. u. Z. durch Chin Chang Suan Shu überarbeitet wurde und in der Fassung von Liu Hui aus dem Jahre 263 erhalten ist. Der Fang-cheng-Algorithmus arbeitet im Grunde mit Spaltenoperationen.
Diese Herangehensweise hatte also im Fernen Osten eine lange Tradition und so ist erklärlich, daß der Japaner Takakazu Seki 1683 zum Determinantenbegriff gelangte, noch bevor Leibniz 1693 in einem Brief an l'Hospital den Gedanken äußerte, die Bedingung für die Lösbarkeit von gewissen linearen Gleichungssystemen mittels eines Determinantenkriteriums zu fassen.

Takakazu Seki (1642-1708)

Colin Mac Laurin begann 1748 mit diesbezüglichen Studien, die Gabriel Cramer 1750 zu einer entsprechenden Theorie entwickelte. Alexandre Vandermonde präsentierte 1771 eine systematische Theorie der Determinanten.
Carl Friedrich Gauß setzte dann im Gegensatz zur Determinantenmethode in seiner Theoria motus coelestium 1809 durch Schilderung der Eliminationsmethode neue Akzente. Soweit seine Verdienste, jedoch rechtfertigt das eigentlich nicht, diesem seit dem Altertum praktizierten Verfahren den Namen „Gaußsches Verfahren“zu geben.
Die Bezeichnung „Rang“wurde 1879 von Ferdinand Georg Frobenius eingeführt.

Ferdinand Georg Frobenius (1849 - 1917)