

Wahrscheinlichkeitstheorie II

Inhalt

1. Erinnerung und Ergänzung: Zufallsgrößen und ihre Verteilungen

- Zufallsgrößen, Verteilungen, Dichten
- mehrdimensionale Normalverteilungen
- charakteristische Funktionen
- Die charakteristische Funktion bestimmt das W-Maß eindeutig
- charakteristische Funktion von Summen unabhängiger Zufallsgrößen
- Gemeinsam normalverteilte Zufallsgrößen sind unabhängig genau dann, wenn die Kovarianzmatrix Diagonalgestalt hat.

2. Brownsche Bewegung

- stochastische Prozesse in diskreter und stetiger Zeit: allgemeine Konzepte
- Satz von Kolmogoroff über die Existenz eines stochastischen Prozesses mit stetigen Pfaden zu gegebenen endlich-dimensionalen Verteilungen
- Gauß-Prozesse
- Lévy-Ciesielski-Konstruktion der Brownschen Bewegung
- Eigenschaften der Brownschen Bewegung: Spiegelung, Skalierung, Verschiebung
- Die Pfade der Brownschen Bewegung sind fast sicher nirgends differenzierbar
- Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen
- Poisson-Prozeß
- Markoff-Prozesse
- rechtsstetige Filtrierungen
- Blumenthalsches 0-1-Gesetz
- Die Brownsche Bewegung wechselt nahe 0 unendlich oft das Vorzeichen
- Stoppzeiten
- starke Markoffeigenschaft
- starke Markoffeigenschaft der Brownschen Bewegung
- Nullstellen der Brownschen Bewegung bilden perfekte Menge von Maß 0

3. Verteilungskonvergenz

- Zentraler Grenzwertsatz als Motivation
- schwache Konvergenz, Beziehung zu anderen Konvergenzbegriffen
- Lévy's Stetigkeitssatz
- Straffheit einer Folge von W-Maßen impliziert Existenz einer schwach konvergenten Teilfolge
-

4. Zentraler Grenzwertsatz

- klassische Formulierung
- Verallgemeinerungen
- Konvergenzrate (Berry-Esseen)

5. Brownsche Bewegung und Irrfahrten

- Reskalierte, linear interpolierte Irrfahrt konvergiert in Verteilung gegen Brownsche Bewegung (Spezialfall des Satzes von Donsker)

6. Martingale

- Martingal, Sub- und Supermartingal
- Vorhersehbarkeit für zeitdiskrete stochastische Prozesse
- Stoppsatz für zeitdiskrete (Super-)Martingale
- Doob'sches "upcrossing"-Lemma
- Doob'sche Martingalungleichung für zeitdiskrete Martingale
- Konvergenzsätze für (Super-)Martingale: fast-sichere Konvergenz, L_2 -Konvergenz, L_2 -Konvergenz
- Rückwärtsmartingale
- Kolmogoroffs starkes Gesetz der großen Zahlen
- Satz von Radon-Nikodym
- Modifikationen für Martingale in stetiger Zeit

7. Stochastische Integration bzgl. der Brownschen Bewegung (Ito-Integral)

- stochastisches Integral für einfache Funktionen
- stochastisches Integral für L_2 -Integranden
- Eigenschaften des stochastischen Integrals, Ito-Isometrie
- Existenz einer stetigen Version
- Martingaleigenschaft

8. Ito-Formel

- eindimensionale Ito-Formel
- partielle Integration für stochastische Integrale

9. Stochastische Differentialgleichungen

- mehrdimensionale Ito-Formel
- starke Lösungen
- Existenz und Eindeutigkeit
- Markoffeigenschaft und starke Markoffeigenschaft der Lösungen