1. Aufgabenblatt zur Analysis II

Abgabe bis 18.4.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe für die Präsenzübungen. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 1.1 (4 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx;$

(b) $\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 16x + 25}};$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - x + 1};$

(d) $\int_0^1 (\arcsin x)^2 \, dx.$

Hausaufgabe 1.2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Integrale auf Konvergenz:

(a) $\int_0^{1/\pi} \sin \frac{1}{x} \, dx;$

(b) $\int_{1/\pi}^{\infty} \sin \frac{1}{x} \, dx;$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x^2.$

Hausaufgabe 1.3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß das Integral $\int_0^\infty e^{-x^a} dx$ für alle $a > 0$ konvergiert und verifizieren Sie die folgende Identität:

$$\int_0^\infty e^{-x^a} dx = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right).$$

Hausaufgabe 1.4 (4 Punkte)

- (a) Gibt es eine unbeschränkte stetige Funktion $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, für die das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x) dx$ konvergiert?
- (b) Es sei $g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Welche der folgenden Bedingungen sind notwendig und welche hinreichend dafür, daß das Integral $\int_0^\infty g(x) dx$ divergiert?
- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existiert nicht;
 - (ii) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ existiert und ist $\neq 0$;
 - (iii) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 g(x)$ existiert nicht.