Prof. Dr. Barbara Gentz
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2008

11. Aufgabenblatt zur Analysis II

Abgabe bis 27.6.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe für die Präsenzübungen.

Hausaufgabe 11.1 (4 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) := (x+y, x^2+y^2) \ .$$

(a) Bestimmen Sie die Graphen der Koordinatenfunktionen f_1 und f_2 sowie die Niveaumengen von f_1 und f_2.

(b) Skizzieren Sie die Niveaumengen von f_1 und f_2.

(c) Skizzieren Sie die Graphen von $x \mapsto f_i(x, y_0)$ und $y \mapsto f_i(x_0, y)$ für $i = 1, 2$ und festes y_0 bzw. x_0. Wie verändern sich die Graphen, wenn x_0 oder y_0 verändert wird?

(d) Versuchen Sie nun, auch die Graphen von $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zu skizzieren für $i = 1, 2$.

Hausaufgabe 11.2 (4 Punkte)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie alle (x, y), in denen die partiellen Ableitungen von f existieren, und berechnen Sie die partiellen Ableitungen in diesem Punkten.

(b) In welchen Punkten sind die partiellen Ableitungen stetig?

Hausaufgabe 11.3 (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^2) \; .$$

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sowie den Gradienten. Geben Sie insbesondere an, wo diese existieren.

Hausaufgabe 11.4 (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \; . \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f auf ganz $\mathbb{R}^2$ zweimal partiell differenzierbar ist, aber

$$D_2 D_1 f(0,0) \neq D_1 D_2 f(0,0)$$

gilt. Wie verträgt sich dies mit der Aussage des Satzes von Schwarz?