Prof. Dr. Barbara Gentz
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2008

12. Aufgabenblatt zur Analysis II

Abgabe bis 4.7.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe für die Präsenzübungen.

Hausaufgabe 12.1 (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die Funktion $F : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x,t) = t^{-n/2} \exp\{-\|x\|^2/(4t)\}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Hausaufgabe 12.2 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, daß f stetig ist.

(b) Für welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, und welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$? Berechnen Sie die Richtungsableitungen, sofern sie existieren.

(c) Existiert der Gradient von f in $(0,0)$? Berechnen Sie diesen, sofern er existiert.

(d) Ist f total differenzierbar in $(0,0)$?

Hausaufgabe 12.3 (4 Punkte)
Betrachten Sie noch einmal die Funktion aus Aufgabe 11.2. Ist diese auf ganz $\mathbb{R}^2$ total differenzierbar?

Hausaufgabe 12.4 (4 Punkte)
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt homogen vom Grad k, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda > 0$ gilt:

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \ .$$

(a) Beschreiben Sie diesen Sachverhalt geometrisch.

(b) Geben Sie nichttriviale Beispiele von Funktionen f für $m = 1, 2, 3$.

(c) Beweisen Sie den Satz von Euler: Ist f differenzierbar in geeigneter Weise (was für eine Differenzierbarkeitsannahme machen Sie?) und homogen vom Grad k, so gilt

$$\langle \mathrm{grad} f(x), x \rangle = k f(x) \ .$$

(Hinweis: Differenzieren Sie zunächst in der Identität $f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$ für festes x nach λ.)