Prof. Dr. Barbara Gentz
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2008

14. Aufgabenblatt zur Analysis II

keine Abgabe

Hausaufgabe 14.1 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy) .$$

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von f und deren Inverse in allen Punkten, in denen diese existiert.

(b) Zeigen Sie, daß f surjektiv ist und daß jeder Punkt $(x,y) \neq (0,0)$ genau zwei Urbilder besitzt.

Hausaufgabe 14.2 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = z^3 + 2xy - 4xz + 2y - 1 .$$

(a) Zeigen Sie, daß durch $f(x,y,z) = 0$ in einer Umgebung von $(x,y) = (1,1)$ eine differenzierbare Funktion $z = \varphi(x,y)$ mit $\varphi(1,1) = 1$ implizit definiert ist.

(b) Berechnen Sie den Gradienten von φ in $(1,1)$.

Hausaufgabe 14.3 (4 Punkte)
Die Gleichung $y^3 + 3xy + 2x^3 = 0$ ist im Punkt $(x,y) = (-1,2)$ erfüllt. Dadurch ist in der Nähe dieses Punktes y als Funktion von x definiert. Berechnen Sie die Ableitung dieser Funktion an der Stelle $x = -1$.

Hausaufgabe 14.4 (4 Punkte)
Zeigen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen, daß sich in einer Umgebung des Punktes $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ die Gleichung $2\sin x + \mathrm{e}^{\sin(xy)} = x + y$ nach $x = \varphi(y)$ auflösen läßt mit einer differenzierbaren Funktion φ mit $\varphi(1) = 0$. Bestimmen Sie zu φ um den Entwicklungspunkt $y_0 = 1$ das Taylorpolynom erster Ordnung, das heißt, T mit $T(y) = \varphi(1) + \varphi'(1)(y-1)$.