Prof. Dr. Barbara Gentz
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2008

2. Aufgabenblatt zur Analysis II

Abgabe bis 25.4.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe für die Präsenzübungen. Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie sowohl Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 2.1 (4 Punkte)
Welche der folgenden Funktionenfolgen konvergieren auf dem Intervall $[0,1]$ gleichmäßig gegen 1?

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^2 , \qquad g_n(x) = 1 + x^n(1-x)^n , \qquad h_n(x) = 1 - x^n(1-x^n) .$$

Hausaufgabe 2.2 (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $f_n(x) = \frac{x^2}{1+nx^2}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß die Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^n \frac{kx^2}{k^3+x^3}$ auf $[0,c]$ gleichmäßig konvergiert. Wie wählen Sie c?

Hausaufgabe 2.3 (4 Punkte)
Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R} \qquad f_n(x) = \frac{x}{n^2}\,\mathrm{e}^{-x/n} .$$

Zeigen Sie, daß die Folge $(f_n)_n$ auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, während

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

gilt.

Hausaufgabe 2.4 (4 Punkte)
Es sei $(f_n)_n$ eine Folge von stetigen Funktionen, $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Es gelte außerdem

$$0 \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x} \quad \text{für alle } x \geq 0 \text{ und alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0\ .$$