

6. Aufgabenblatt zur Analysis II

Abgabe bis 23.5.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe für die Präsenzübungen.

Hausaufgabe 6.1 (4 Punkte)

Beweisen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} .$$

Hinweis: Studieren Sie noch einmal die Beispiele zu Satz 23.2 aus der Vorlesung und denken Sie auch an Hausaufgabe 3.1.

Hausaufgabe 6.2 (4 Punkte)

Zeichnen Sie für die folgenden Normen bzw. Metriken im \mathbb{R}^2 jeweils die Kugeln um 0 mit Radius $1/2$, 1 und 2:

Euklidische Metrik, triviale Metrik, Maximumsnorm, die Metrik aus Präsenzaufgabe 6.1 sowie

$$\|(x, y)\|_4 = (x^4 + y^4)^{1/4} .$$

Hausaufgabe 6.3 (4 Punkte)

Es sei X die Menge aller Folgen komplexer Zahlen. Zeigen Sie, daß durch

$$d((a_n), (b_n)) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|a_k - b_k|}{1 + |a_k - b_k|} \quad \forall (a_n), (b_n) \in X$$

eine Metrik auf X definiert wird.

Hausaufgabe 6.4 (4 Punkte) *Vierecksungleichung*

Es seien (X, δ) ein metrischer Raum und $a, b, c, d \in X$. Zeigen Sie:

$$|\delta(a, b) - \delta(c, d)| \leq \delta(a, c) + \delta(b, d) .$$

Erläutern Sie den Namen “Vierecksungleichung” anhand einer Skizze.