

7. Aufgabenblatt zur Analysis II

Abgabe bis 30.5.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe für die Präsenzübungen.

Hausaufgabe 7.1 (4 Punkte)

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\overline{A \times B} = \bar{A} \times \bar{B}.$$

Hausaufgabe 7.2 (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß eine Teilmenge eines metrischen Raumes X genau dann abgeschlossen ist, wenn $\partial Y \subset Y$.

Erläutern Sie diese Aussage an den folgenden Beispielen: (a) Y ein Intervall in \mathbb{R} mit Endpunkten a und b , (b) Y ein Quader im \mathbb{R}^n , (c) $Y = X$, (d) $Y = \mathbb{Q}$ und $Y = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ als Teilmenge von \mathbb{R} .

Hausaufgabe 7.3 (4 Punkte)

- (a) Betrachten Sie $N = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ als Teilmenge von \mathbb{R} .
- (b) Betrachten Sie die gleiche Menge $N = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ als Teilmenge von \mathbb{Q} .
- (c) Betrachten Sie schließlich $N = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ als Teilmenge von $(0, \infty)$.

Beantworten Sie jeweils die folgenden Fragen: Ist N offen? Ist N abgeschlossen? Bestimmen Sie ∂N , N° , \bar{N} .

Hausaufgabe 7.4 (4 Punkte) Vierecksungleichung

Es seien X ein metrischer Raum und $A, B \subset X$. Zeigen Sie:

- (a) $(A^\circ)^\circ = A^\circ \subset A \subset \bar{A} = \bar{\bar{A}}$.
- (b) $A \subset B \implies A^\circ \subset B^\circ$.
- (c) $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$.
- (d) $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

Gilt hier auch Gleichheit? Geben Sie einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.