Prof. Dr. Barbara Gentz
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

SS 2008

8. Aufgabenblatt zur Analysis II

Abgabe bis 6.6.2008 vor der Vorlesung

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach der Leiterin bzw. des Leiters Ihrer Übungsgruppe für die Präsenzübungen.

Hausaufgabe 8.1 (4 Punkte)
Es sei

$$g(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \ .$$

Diskutieren Sie die folgenden Limiten (Existieren diese? Unter welchen Bedingungen?):

(a) $\lim\limits_{x\to 0} g(x,y)$ (b) $\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)$ (c) $\lim\limits_{y\to 0}\bigl(\lim\limits_{x\to 0} g(x,y)\bigr)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0}\bigl(\lim\limits_{y\to 0} g(x,y)\bigr)$

Ist g stetig in $(0,0)$?

Hausaufgabe 8.2 (4 Punkte)
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{|x|} + y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie im Detail, daß f stetig ist in allen $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie: f ist stetig in $(x,y) = (0,0)$.

Hausaufgabe 8.3 (4 Punkte)
Es seien V und W normierte Vektorräume. Beweisen Sie, daß die in der Vorlesung definierte Norm einer stetigen linearen Abbildung tatsächlich eine Norm auf dem Vektorraum aller stetigen linearen Abbildung von V nach W definiert.

Hausaufgabe 8.4 (4 Punkte)
Auf dem Vektorraum $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ aller stetig differenzierbaren Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ werde die folgende Norm definiert:

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} = \sup\{|f(x)| + |f'(x)| \colon x \in [a,b]\} \ .$$

(a) Zeigen Sie, daß $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ vollständig ist mit dieser Norm.

(b) Zeigen Sie, daß die Abbildung

$$D : \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \ , \qquad D(f) = f' \ ,$$

stetig ist, sofern $\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ mit der oben eingeführten Norm versehen ist und $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm.